5.2 Espérance mathématique

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

- Dans une expérience aléatoire, l'espérance mathématique correspond à la **somme des produits des valeurs** d'une variable aléatoire par leur **probabilité respective.** Autrement dit, l'espérance mathématique correspond à la **moyenne** des valeurs des variables aléatoires pondérée par la probabilité de chacune de ces valeurs.
- L'espérance mathématique, E_m, peut se calculer de cette façon.

$$E_m = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + \ldots + p_n \times r_n$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de valeurs possibles de la variable aléatoire, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ correspondent aux probabilités respectives et $r_1, r_2, \ldots, r_n$ correspondent aux diverses valeurs possibles de la variable aléatoire.

- Pour déterminer l'espérance mathématique, on peut utiliser la démarche suivante.

Démarche	*Exemple:* Lors d'un transport, la probabilité que des articles soient abîmés est de 12 %, ce qui entraîne des pertes de 150 $ par article. De plus, la probabilité que des emballages soient déchirés est de 39 %, ce qui génère seulement 20 $ de profit par article. Les articles en bon état peuvent être vendus au plein prix, ce qui génère des profits de 55 $ par article. Quel profit l'entreprise peut-elle espérer avec un chargement de 1200 articles?
1. Déterminer le nombre de valeurs possibles, n, de la variable aléatoire selon le contexte.	Ici, $n = 3$, soit les articles abîmés, les articles dont l'emballage est déchiré et les articles en bon état.
2. Pour chaque variable identifiée à l'étape **1**, déterminer sa probabilité, p, et sa valeur, r.	$p_1 = 12\ \%$, $r_1 = {}^-150$ $p_2 = 39\ \%$, $r_2 = 20$ $p_3 = 100\ \% - (12\ \% + 39\ \%) = 49\ \%$, $r_3 = 55$
3. Calculer l'espérance mathématique, E_m.	$E_m = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$ $= 12\ \% \times {}^-150 + 39\ \% \times 20 + 49\ \% \times 55$ $= {}^-18 + 7{,}80 + 26{,}95$ $= 16{,}75$ $
4. Répondre à la question.	Dans ces conditions, l'entreprise peut **espérer** faire un profit moyen de 16,75 $ par article. Pour une production de 1200 articles, l'entreprise peut espérer faire un profit de 16,75 × 1200 = 20 100 $.

ESPÉRANCE DE GAIN

- Dans le cas d'un jeu ayant une ou des **probabilités de gain** et une ou des **probabilités de perte,** l'espérance mathématique se nomme plus souvent espérance de gain, E_g, et peut se calculer de cette façon.

E_g = (1re probabilité de gagner) × (1er gain possible) + (2e probabilité de gagner) × (2e gain possible) + …
+ (1re probabilité de perdre) × (1re perte possible) + (2e probabilité de perdre) × (2e perte possible) + …

- Le gain possible correspond au **gain diminué de la mise initiale.**
- Dans la plupart des jeux de hasard, la perte correspond généralement à la mise initiale et est représentée par une valeur négative.

5

Exemple : Massimo débourse 2 $ pour jouer à un jeu. Il lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12 ; s'il obtient un multiple de 3, il gagne 5 $ et s'il obtient un 10 ou un 11, il gagne 3 $. Quelle est l'espérance de gain de ce jeu ?

$p_1 = P(\text{multiple de 3}) = \frac{4}{12}, r_1 = 5 - 2 = 3$

$p_2 = P(10 \text{ ou } 11) = P(10) + P(11) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}, r_2 = 3 - 2 = 1$

$p_3 = 1 - \left(\frac{4}{12} + \frac{2}{12}\right) = \frac{6}{12}, r_3 = -2$

$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$

$= \frac{4}{12} \times 3 + \frac{2}{12} \times 1 + \frac{6}{12} \times -2 = \frac{12}{12} + \frac{2}{12} + -\frac{12}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, soit $\approx$ 0,17 $.

L'espérance de gain de ce jeu est d'environ 0,17 $. Si Massimo joue un très grand nombre de fois, il peut espérer gagner en moyenne 0,17 $ chaque fois qu'il joue.

ÉQUITÉ

- Un jeu dont l'espérance **mathématique** (ou espérance de gain) est supérieure à 0 **avantage les participants**, tandis qu'un jeu dont l'espérance mathématique est inférieure à 0 **désavantage** les participants. Lorsque l'espérance mathématique d'un jeu est égale à 0, il est considéré comme **équitable.**

Exemple : Sandrine débourse 12 $ pour jouer à un jeu. Elle lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 ; si elle obtient un diviseur de 4, elle gagne 20 $, si elle obtient un 6, on lui remet sa mise, sinon, elle la perd. Ce jeu est-il équitable ?

$p_1 = P(\text{diviseur de 4}) = \frac{3}{6}, r_1 = 20 - 12 = 8$

$p_2 = P(6) = \frac{1}{6}, r_2 = 12 - 12 = 0$

$p_3 = 1 - \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6}, r_3 = -12$

$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$

$= \frac{3}{6} \times 8 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{2}{6} \times -12 = \frac{24}{6} + \frac{0}{6} + -\frac{24}{6} = 0$

L'espérance de gain de ce jeu étant de 0 $, il est donc équitable.

- Pour déterminer la mise initiale d'une situation que l'on veut équitable, on peut utiliser la démarche suivante.

Démarche	***Exemple :*** **À un jeu de hasard, la probabilité de remporter 100 $ est de 10 % et celle de remporter 20 $ est de 20 %. Quelle devrait être la mise initiale si on veut que ce jeu soit équitable ?**
1. Assigner une variable à la mise initiale.	Soit x, la mise initiale.
2. Déterminer le nombre de valeurs possibles, n, de la variable aléatoire selon le contexte.	Ici, $n = 3$, soit remporter 100 $, remporter 20 $ ou perdre sa mise.
3. Pour chaque variable identifiée à l'étape **2**, déterminer sa probabilité, p, et sa valeur, r.	$p_1 = 10\ \%, r_1 = 100 - x$ $p_2 = 20\ \%, r_2 = 20 - x$ $p_3 = 100\ \% - (10\ \% + 20\ \%) = 70\ \%, r_3 = -x$
4. Établir l'équation permettant de calculer l'espérance de gain, E_g.	$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$ $= 10\ \% \times (100 - x) + 20\ \% \times (20 - x) + 70\ \% \times -x$
5. Résoudre l'équation en remplaçant la valeur de E_g par 0, puisque la situation doit être équitable.	$0 = 10\ \% \times (100 - x) + 20\ \% \times (20 - x) + 70\ \% \times -x$ $0 = 10 - 0{,}1x + 4 - 0{,}2x - 0{,}7x$ $0 = 14 - x$ $x = 14$ $
6. Répondre à la question.	La mise initiale doit être de 14 $ pour que le jeu soit équitable.