LES IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

Une notion loin d’être facile,

mais un préalable à nos cours de maths collégiaux !

Différents types de questions…

Important d'en voir la différence !

SIMPLIFIER

DÉMONTRER

RÉSOUDRE

DANS UN INTERVALLE OU NON

ET MÉLANGEONS LE TOUT !

RIEN DE PLUS SIMPLE !...

DES OUTILS ESSENTIELS !

$$cosec\ x = \frac{1}{\sin x} \text{ où } \sin x \neq 0$$

$$\sec x = \frac{1}{cosx} \text{ où } \cos x \neq 0$$

$$cotan\ x = \frac{1}{tanx} \text{ où } \tan x \neq 0$$

Rare qu'on l'utilise

$$\tan x = \frac{sinx}{\cos x} \text{ où } \cos x \neq 0$$

$$cotan\ x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ où } \sin x \neq 0$$

Beaucoup plus utile

$$sin^2\ x + cos^2\ x = 1$$

$$1 + tan^2\ x = sec^2\ x$$

$$1 + cotan^2\ x = cosec^2\ x$$

SIMPLIFIER

Réduire l'expression ou rendre plus simple en nous servant des identités.

Évidemment, plusieurs chemins peuvent être utilisés !
Des plus courts et des plus longs !

Ex : $(\sec^2 x - 1)\cot^2 x$

DÉMONTRER

Arriver à prouver que le côté gauche de l'équation est bien égal au côté droit en se servant des identités.

Voici quelques conseils supplémentaires pour tenter de vous guider le plus possible lors d'une démonstration :

- Idéalement, modifier (simplifier) un seul côté de l'équation.
- Faire en sorte le plus possible de faire apparaître des sinus et des cosinus.
- S'il y a des **additions et des soustractions, mettre au même dénominateur**.
- Vérifier les 3 dernières identités pour créer un raccourci.
- Ne pas simplifier un numérateur et un dénominateur si les termes sont séparés par un + ou un -.
- Simplifier les numérateurs et les dénominateurs si les termes sont séparés par une multiplication.
- **Fractions à 3 ou 4 étages, multiplier par la fraction inverse**.
- Avant de faire la distributivité avec une parenthèse, toujours s'assurer d'avoir **fait le ménage dans la parenthèse avant**.
- Utiliser le produit croisé si c'est propice (rien d'autre à faire (seulement des sin et cos, et non pas $\sin^2$ et $\cos^2$) et énoncé du genre — = —)
- Si 4 termes dans l'énoncé, penser à la mise en évidence double.
- Parfois nécessaire de développer une parenthèse au carré.
- Penser à la différence de carrés par exemple : $(\sin^2 x - 1) = (\sin x + 1)(\sin x - 1)$ (vice et versa)
- Solution de dernier recours : mise en évidence simple

Malheureusement, je n'ai pas de solution miracle à vous donner ! Mais pour vous récompenser lorsque vous réussissez une identité, écrivez pour votre plaisir personnel un gros CQFD, question de se pratiquer pour l'année prochaine (vous aurez alors, du moins j'espère, une petite pensée pour moi) !

Ex : $cotanx\,(cosx\; + \;tanx\; sinx) = cosecx$

Transformer en sin et cos

Faire le ménage de la parenthèse

Addition = mettre même dénomi.

Ex2 :

$$\frac{\sin^2 x\,(1+\tan^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cot an^2 x}{\cos ec^2 x} = \tan^2 x$$

Identité = raccourci

$$\frac{\sin^2 x\,(\sec^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \tan^2 x$$

Fraction 4 étages

$$\frac{\sin^2 x\,\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1} = \tan^2 x$$

Multiplier par l'inverse

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}} \cdot \frac{\sin^2 x}{1} = \tan^2 x$$

Réduire numérateur et dénominateur car multiplications

Ex3 :

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} = \tan x$$

Soustraction = mise au même dénomi.

$$\frac{1+\sin x - \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \tan x$$

Faire le ménage sur chaque étage

$$\frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \tan x$$

Mise en évidence simple

$$\frac{\sin x\,(\sin x + 1)}{\cos x\,(1+\sin x)} = \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\tan x = \tan x$$

Ex4 :

$$\frac{\sec x + 1}{\tan x} = \frac{\tan x}{\sec x - 1}$$

$$(\sec x + 1)(\sec x - 1) = \tan x \cdot \tan x$$

Bel exemple de produit croisé

$$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = \tan^2 x$$

Ex5 :

f) $2\sec^2 x = (1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2$

Développer deux parenthèses au carré devient ici utile

$$2\sec^2 x = \left(1 + \cancel{2\tan x} + \tan^2 x\right) + \left(1 - \cancel{2\tan x} + \tan^2 x\right)$$

$$2\sec^2 x = 1 + \tan^2 x + 1 + \tan^2 x$$

$$2\sec^2 x = \sec^2 x + \sec^2 x$$

$$2\sec^2 x = 2\sec^2 x$$

RÉSOUDRE (sans intervalle)

Trouver la valeur de x de façon générale.

a) $2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(x-\pi)+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$$2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(x-\pi)=\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{1}{2}(x-\pi)=\frac{1}{2}$$

Donc $\theta 1 = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60°$ ou $\frac{\pi}{3}$

$\theta 2 = 360-60° = 300°$ ou $\frac{5\pi}{3}$

D'où $\frac{1}{2}(x-\pi)=\frac{\pi}{3}+2n\pi$ ou $\frac{1}{2}(x-\pi)=\frac{5\pi}{3}+2n\pi$

$x-\pi = \frac{2\pi}{3}+4n\pi$ $\qquad$ $x-\pi=\frac{10\pi}{3}+4n\pi$

$x=\frac{5\pi}{3}+4n\pi$ $\qquad$ $x=\frac{13\pi}{3}+4n\pi$

où $n\in\mathbb{Z}$

RÉSOUDRE (avec intervalle)

Trouver la valeur de x de façon plus précise dans un intervalle donné.

a) $5\tan 2(x-\pi)+3>8$ si $x \in [0, 2\pi]$

$5\tan 2(x-\pi)+3 = 8$

$5\tan 2(x-\pi) = 5$

$\tan 2(x-\pi) = 1$

Donc $\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$

D'où $2(x-\pi) = \frac{\pi}{4} + n\pi$

$x-\pi = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$

$x = \frac{9\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}$

Restriction

$2(x-\pi) \neq \frac{\pi}{6} + n\pi$

$2(x-\pi) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x-\pi \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$

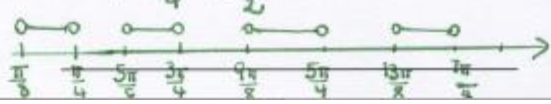
$x \neq \frac{5\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$

Point-test $\left(\frac{3\pi}{16}\right)$

$5\tan 2\left(\frac{3\pi}{16}-\pi\right)+3>8$

$15{,}07 > 8$

VRAI



MÉLANGEONS LE TOUT !

(Résoudre avec intervalle, démontrer, simplifier, et pourquoi pas BERTHA)

Résoudre dans l'intervalle $[0,2\pi]$

b) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

$$2(1-\sin^2 x) + \sin x = 1$$

$$2 - 2\sin^2 x + \sin x = 1$$

$$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

par formule quadratique

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot -2\cdot 1}}{-4}$$