CHAPITRE 2

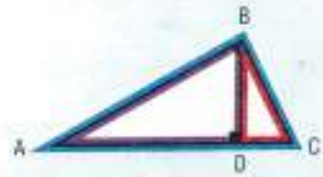
Géométrie

RAPPEL

Relations métriques, rapports trigonométriques, loi des sinus et aire d'un triangle quelconque

RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

En abaissant la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on peut déterminer trois triangles rectangles semblables. À partir des triangles ainsi formés, on peut déduire les trois énoncés suivants.



1. **Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.**

$$\frac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{AB}} = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} \text{ ou } (m\,\overline{AB})^2 = m\,\overline{AD} \times m\,\overline{AC}$$

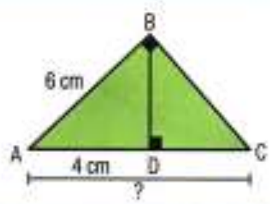
$$\frac{m\,\overline{DC}}{m\,\overline{BC}} = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} \text{ ou } (m\,\overline{BC})^2 = m\,\overline{DC} \times m\,\overline{AC}$$

Exemple :

$$\frac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{AB}} = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{m\,\overline{AC}}$$

$$m\,\overline{AC} = 9 \text{ cm}$$



2. **Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.**

$$\frac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{BD}} = \frac{m\,\overline{BD}}{m\,\overline{CD}} \text{ ou } (m\,\overline{BD})^2 = m\,\overline{AD} \times m\,\overline{CD}$$

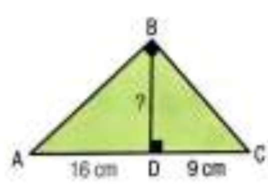
Exemple :

$$\frac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{BD}} = \frac{m\,\overline{BD}}{m\,\overline{CD}}$$

$$\frac{16}{m\,\overline{BD}} = \frac{m\,\overline{BD}}{9}$$

$$(m\,\overline{BD})^2 = 144$$

$$m\,\overline{BD} = 12 \text{ cm}$$



3. Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

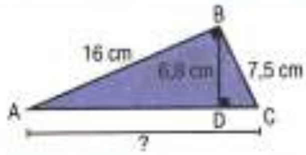
$$m\,\overline{AC} \times m\,\overline{BD} = m\,\overline{AB} \times m\,\overline{BC}$$

Exemple :

$m\,\overline{AC} \times m\,\overline{BD} = m\,\overline{AB} \times m\,\overline{BC}$

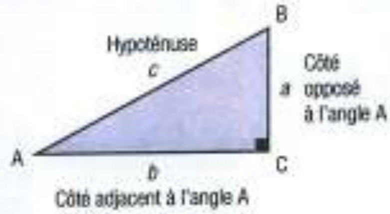
$m\,\overline{AC} \times 6{,}8 = 16 \times 7{,}5$

$m\,\overline{AC} \approx 17{,}65$ cm



RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

- Dans le triangle rectangle ABC illustré, les trois principaux rapports trigonométriques pour l'angle A sont énoncés dans le tableau suivant.



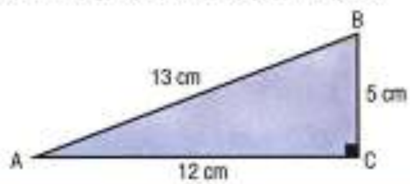
Rapport trigonométrique	Notation abrégée
sinus A $= \dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$	$\sin A = \dfrac{a}{c}$
cosinus A $= \dfrac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle A}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$	$\cos A = \dfrac{b}{c}$
tangente A $= \dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle A}}$	$\tan A = \dfrac{a}{b}$

Exemple : Dans le triangle ABC, on peut définir les rapports trigonométriques suivants pour l'angle A.

$$\sin A = \frac{\text{mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle A}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{\text{mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle A}} = \frac{5}{12}$$



- Dans un triangle rectangle, il est possible de déterminer la mesure d'un côté ou d'un angle aigu à l'aide des rapports trigonométriques. L'arc sinus ($\sin^{-1}$), l'arc cosinus ($\cos^{-1}$) et l'arc tangente ($\tan^{-1}$) permettent de déterminer la mesure d'angles dont on connaît respectivement la valeur du sinus, du cosinus ou de la tangente.

Exemples :

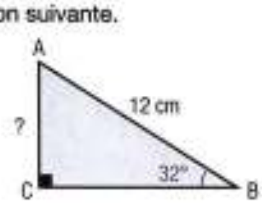
1) Dans le triangle ABC, on peut déterminer la mesure du côté AC de la façon suivante.

$$\sin B = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AB}}$$

$$\sin 32° = \frac{m\,\overline{AC}}{12}$$

$$m\,\overline{AC} = 12 \sin 32°$$

$$\approx 6{,}36 \text{ cm}$$



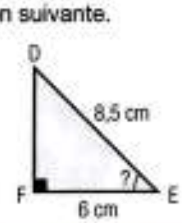
2) Dans le triangle DEF, on peut déterminer la mesure de l'angle E de la façon suivante.

$$\cos E = \frac{m\,\overline{EF}}{m\,\overline{DE}}$$

$$= \frac{6}{8{,}5}$$

$$m\angle E = \cos^{-1}\left(\frac{6}{8{,}5}\right)$$

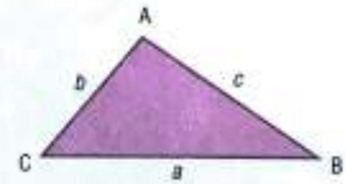
$$\approx 45{,}1°$$



LOI DES SINUS

- Dans un **triangle quelconque,** les mesures des côtés sont proportionnelles au sinus des mesures des angles opposés à chacun des côtés.
  Dans le triangle quelconque ABC, on a :

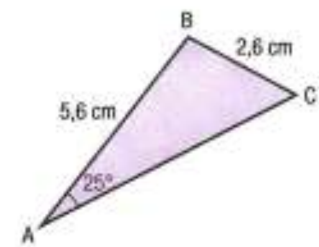
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



- La loi des sinus permet de déterminer la mesure :
  - d'un côté si l'on connaît la mesure de deux angles et la mesure d'un côté ;
  - d'un angle si l'on connaît les mesures de deux côtés et la mesure d'un angle opposé à l'un des deux côtés.

Exemple : Dans le triangle ABC, on peut déterminer la mesure de l'angle C de la façon suivante.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{2{,}6}{\sin 25°} = \frac{5{,}6}{\sin C}$$
$$\sin C = \frac{5{,}6 \sin 25°}{2{,}6}$$
$$m \angle C = \sin^{-1}\left(\frac{5{,}6 \sin 25°}{2{,}6}\right)$$
$$\approx 65{,}54°$$



- Lorsqu'on calcule la mesure d'un angle à l'aide de la loi des sinus, on obtient toujours la mesure d'un angle aigu. Or, des angles supplémentaires ont le même sinus.

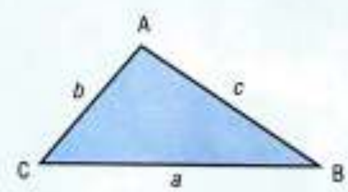
$$\sin A = \sin (180° - A)$$

AIRE D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

Formule trigonométrique

On peut calculer l'aire A d'un triangle quelconque si l'on connaît les mesures de ses deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés. L'aire est obtenue en faisant le demi-produit des mesures de ces deux côtés par le sinus de l'angle compris entre ces côtés. Pour le triangle ABC, on a :

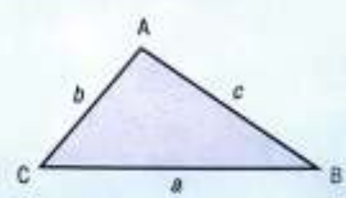
$$A = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$



Formule de Héron

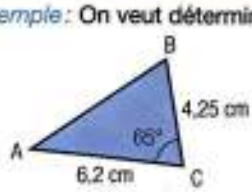
On peut calculer l'aire A d'un triangle quelconque dont on connaît les mesures des trois côtés à l'aide de la formule de Héron. Pour le triangle ABC, on a :

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, où p est le **demi-périmètre** du triangle, c'est-à-dire $p = \frac{a + b + c}{2}$.



Exemple : On veut déterminer l'aire de chacun des triangles suivants.

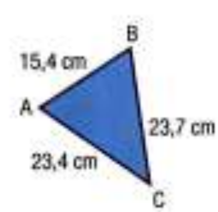
1)



$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$
$$= \frac{4{,}25(6{,}2) \sin 65°}{2}$$
$$\approx 11{,}94 \text{ cm}^2$$

2) $p = \frac{a + b + c}{2}$

$$= \frac{23{,}7 + 23{,}4 + 15{,}4}{2}$$
$$= 31{,}25 \text{ cm}$$

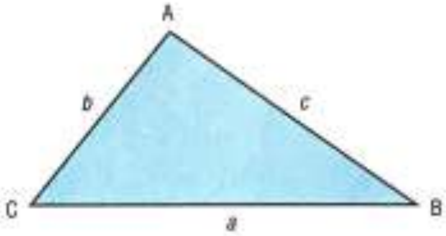


$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$
$$= \sqrt{31{,}25(31{,}25 - 23{,}7)(31{,}25 - 23{,}4)(31{,}25 - 15{,}4)}$$
$$\approx 171{,}34 \text{ cm}^2$$

2.1 Loi des cosinus

- Dans un **triangle quelconque,** le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des autres côtés, moins le double du produit des mesures de ces autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés. Dans le triangle ABC, on a :

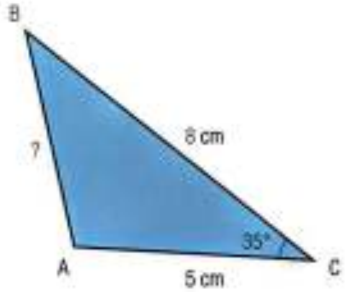
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



- La loi des cosinus permet de déterminer la mesure :
  - d'un côté si l'on connaît les mesures des deux autres côtés et la mesure de l'angle compris entre ces deux autres côtés ;
  - d'un angle si l'on connaît les mesures des trois côtés.

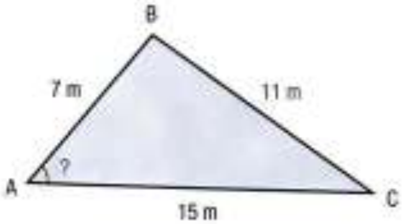
Exemples :

1) Dans le triangle illustré, on peut déterminer la mesure du segment AB de la façon suivante.



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ (\text{m}\ \overline{AB})^2 &= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos 35° \\ \text{m}\ \overline{AB} &= \sqrt{8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos 35°} \\ &= \sqrt{23{,}47} \\ &\approx 4{,}84 \text{ cm} \end{aligned}$$

2) Dans le triangle illustré, on peut déterminer la mesure de l'angle A de la façon suivante.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ 11^2 &= 15^2 + 7^2 - 2(15)(7)\cos A \\ 121 &= 274 - 210\cos A \\ {}^-153 &= {}^-210\cos A \\ \cos A &= \frac{{}^-153}{{}^-210} \\ &= \frac{51}{70} \\ \text{m}\angle A &= \cos^{-1}\left(\frac{51}{70}\right) \\ &\approx 43{,}23° \end{aligned}$$