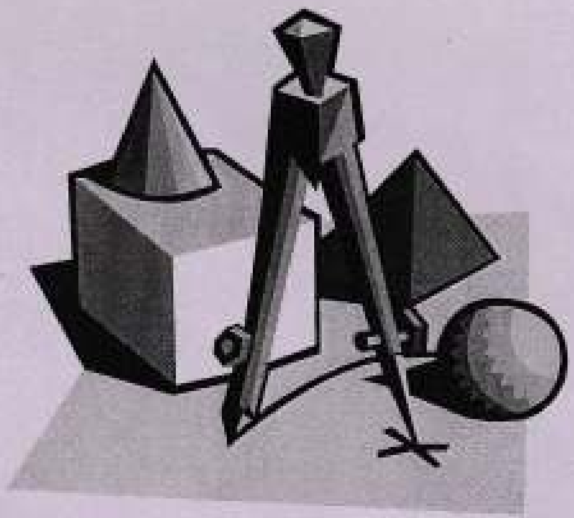
PANORAMA 12

Des polygones aux polyèdres



Notes de cours

Nom : [redacted]

Groupe : [redacted]

École secondaire le Carrefour

2019-2020

Relations entre les unités d'aire du système international d'unités

Le mètre carré est l'unité d'aire de base.

Chaque unité possède une valeur qui est 100 fois plus grande que la valeur de l'unité placée à sa droite et 100 fois plus petite que celle placée à sa gauche.

Nom de l'unité d'aire	kilomètre carré	hectomètre carré	décamètre carré	mètre carré	décimètre carré	centimètre carré	millimètre carré
Symbole	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Valeur exprimée en mètres carrés	1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	0,000 001 m^2

* dans $1 m^2$ ⇒ il y a $100 dm^2$

unités d'aire

$$km^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} m^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{\times 100}{\overset{\div 100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

Ex. : 1) $12 m^2$ = 120 000 cm^2 12×100^2 ou $12 \times 100 \times 100$

2) $23{,}4 mm^2$ = 0,000 000 234 dam^2 $23{,}4 \div 100^4$ ou $23{,}4 \div 100 \div 100 \div 100 \div 100$

3) $65{,}1 hm^2$ = 65 100 000 dm^2 $65{,}1 \times 100^3$ ou $65{,}1 \times 100 \times 100 \times 100$

Définition d'un polygone régulier

Un polygone régulier est une figure géométrique dont tous les côtés et tous les angles sont isométriques.

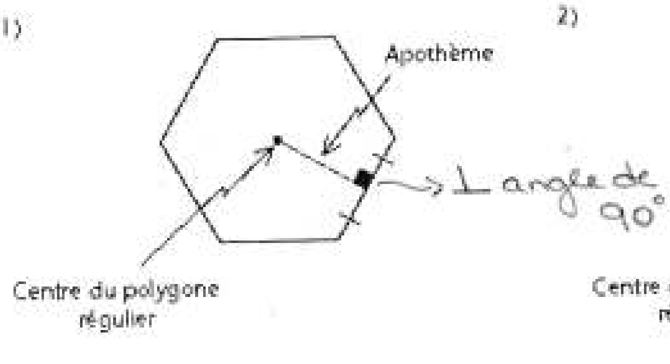
Nom des polygones réguliers

Nombre de côtés	Nom du polygone régulier
3	Triangle équilatéral
4	carré
5	Pentagone
6	hexagone
7	heptagone
8	octogone
9	ennéagone
10	Décagone
11	Hendécagone
12	Dodécagone
20	Icosagone

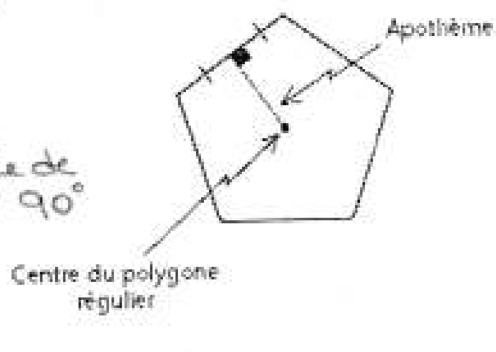
Apothème d'un polygone régulier

L'apothème d'un polygone régulier est le segment perpendiculaire mené du centre d'un polygone régulier au milieu d'un de ses côtés.

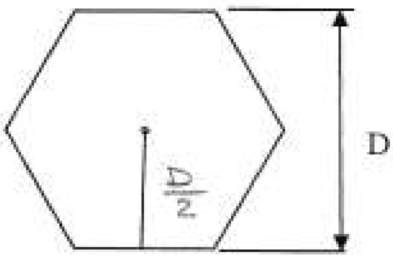
Ex. : 1)



2)



L'apothème d'un polygone régulier peut aussi correspondre à la moitié de la distance **entre deux côtés parallèles** d'un polygone.



D ÷ 2 = apothème

Calcul du périmètre d'un polygone régulier

Le périmètre d'un polygone régulier se calcule en multipliant la mesure d'un de ses côtés par le nombre de côtés.

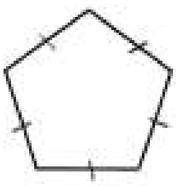
P = c • n où **P** représente le périmètre

c représente la mesure d'un côté du polygone

n représente le nombre de côtés du polygone

Exemples :

1) Quel est le périmètre du polygone régulier suivant?



4cm

$P = c \cdot n$
$= 4 \cdot 5$
$P = 20$ cm

$c = 4$ cm
$n = 5$ côtés
$P = ?$

2) Quel est le périmètre d'un octogone régulier de 9 cm de côté?

$n = 8$
$c = 9$ cm
$P = ?$

$P = c \cdot n$
$= 9 \cdot 8$
$P = 72$ cm

Aire d'un polygone régulier

Il existe plusieurs façons de calculer l'aire d'un polygone régulier. En voici deux :

c = mesure de côté
a = apothème
n = nombre de côtés

1) Première méthode

$$\begin{pmatrix}\text{Aire d'un}\\ \text{polygone}\\ \text{régulier}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{aire}\\ \text{d'un triangle}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{nombre de côtés}\\ \text{du polygone}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{c \times a}{2} \times n$$

2) Deuxième méthode

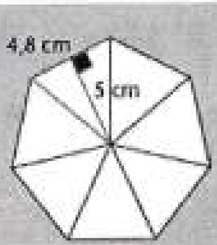
$$\begin{pmatrix}\text{Aire d'un}\\ \text{polygone}\\ \text{régulier}\end{pmatrix} = \frac{(\text{périmètre du polygone}) \times (\text{apothème})}{2}$$

$$= \frac{c \times n \times a}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{can}{2}}$$

où c représente la mesure d'un des côtés du polygone, a, l'apothème du polygone, et n, le nombre de côtés du polygone.

Ex. :



c = 4,8 cm
n = 7 côtés
a = 5 cm

On peut toujours décomposer un polygone régulier en un nombre de triangles isocèles isométriques égal au nombre de côtés de ce polygone.

Aire d'un heptagone régulier $= \frac{c \cdot a}{2} \cdot n$

$= \left(\frac{4,8 \cdot 5}{2}\right) \cdot 7$

$A = 84 \text{ cm}^2$

Ex. :

c = 4,8 cm
a = 5 cm
n = 7 côtés

Aire d'un heptagone régulier $= \frac{can}{2}$

$= \frac{4,8 \cdot 5 \cdot 7}{2}$

$A = 84 \text{ cm}^2$

Autres exemples:

1) Calcule l'aire d'un heptagone régulier de 1,2 dm de côté dont l'apothème mesure 1,25 dm.

n = 7 côtés
c = 1,2 dm
a = 1,25 dm

$A = \frac{can}{2}$

$= \frac{1,2 \cdot 1,25 \cdot 7}{2}$

$A = 5,25 \text{ dm}^2$

2) Un des côtés d'un octogone régulier mesure 11 m et son apothème est de 12 m. Quelle est l'aire de ce polygone?

n = 8 côtés
c = 11 m
a = 12 m

$A = \frac{can}{2}$

$= \frac{11 \cdot 12 \cdot 8}{2}$

$A = 528 \text{ m}^2$

Déterminer une mesure manquante

Pour déterminer une mesure manquante dans une formule d'aire, on peut utiliser les opérations inverses c'est-à-dire la résolution algébrique.

Exemple 1 :

Le périmètre d'un polygone régulier est de 40,8cm et la mesure d'un des côtés est égale à 3,4cm. Quel est le nom de ce polygone?

$P = 40{,}8\text{cm}$

$c = 3{,}4\text{cm}$

$n = ?$

$P = nc$

$40{,}8 = n \cdot 3{,}4$

$\frac{40{,}8}{3{,}4} = \frac{n \cdot 3{,}4}{3{,}4}$

$12 = n$

C'est un dodécagone

Exemple 2 :

L'aire d'un pentagone régulier est de 7956mm² et la mesure de ses côtés est 68mm. Quelle est la mesure de son apothème?

$A = 7956\text{mm}^2$

$n = 5$ côtés

$c = 68\text{ mm}$

$a = ?$

$A = \frac{can}{2}$

$7956 = \frac{68 \cdot a \cdot 5}{2} \rightarrow 68 \cdot 5 \div 2 = 170$

$\frac{7956}{170} = \frac{170 \cdot a}{170}$

$46{,}8 = a$

L'apothème mesure 46,8 mm.

Exemple 3 :

L'aire d'un polygone régulier est de 20 585,7cm². La mesure de ses côtés est de 89cm et son apothème mesure 77,1cm. Quel est le nom de ce polygone?

$A = 20\,585{,}7\text{ cm}^2$

$c = 89\text{cm}$

$a = 77{,}1\text{cm}$

$n = ?$

$A = \frac{can}{2}$

$20585{,}7 = \frac{89 \cdot 77{,}1 \cdot n}{2} \rightarrow 89 \cdot 77{,}1 \div 2$

$\frac{20585{,}7}{3430{,}95} = \frac{3430{,}95 \cdot n}{3430{,}95}$

$6 = n$

C'est un hexagone

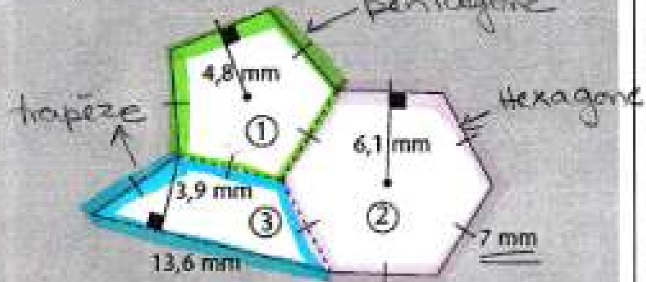
Aire d'un polygone décomposable

Pour calculer l'aire d'un polygone décomposable, on le décompose en polygones plus simples ou on procède par soustraction d'aires selon les données du problème.

↳ pour les partie ombrées

Ex. : Calculer l'aire totale

1) - **Décomposition**



$A_T = A_① + A_② + A_③$

$= \frac{can}{2} + \frac{can}{2} + \frac{(B+b)\cdot h}{2}$

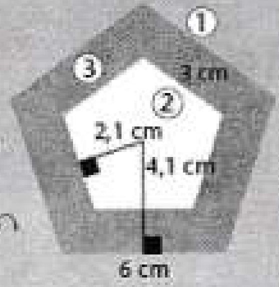
$= \frac{7 \cdot 4,8 \cdot 5}{2} + \frac{7 \cdot 6,1 \cdot 6}{2} + \frac{(13,6+7)\cdot 3,9}{2}$

$= 84 + 128,1 + 40,17$

$A_T = 252,27\ mm^2$

Calculer l'aire de la partie ombrée $A_③$

2) **Soustraction d'aires**



②
n = 5 côtés
c = 3 cm
a = 2,1 cm

①
n = 5 côtés
c = 6 cm
a = 4,1 cm

$A_③ = A_① - A_②$

$= \frac{can}{2} - \frac{can}{2}$

$= \frac{6 \cdot 4,1 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 5}{2}$

$= 61,5 - 15,75$

$A_③ = 45,75$

ou

$A_① = \frac{can}{2} = \frac{7 \cdot 4,8 \cdot 5}{2} = 84\ mm^2$

$A_② = \frac{can}{2} = \frac{7 \cdot 6,1 \cdot 6}{2} = 128,1\ mm^2$

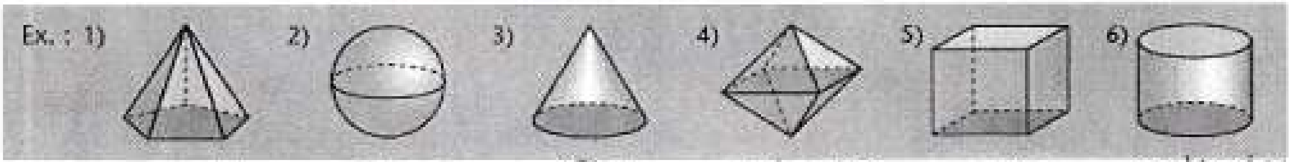
$A_③ = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(13,6+7)\cdot 3,9}{2} = 40,17\ mm^2$

$A_T = 84 + 128,1 + 40,17$

$= 252,27\ mm^2$

Les solides

Un solide est une portion d'espace limitée par une surface fermée.

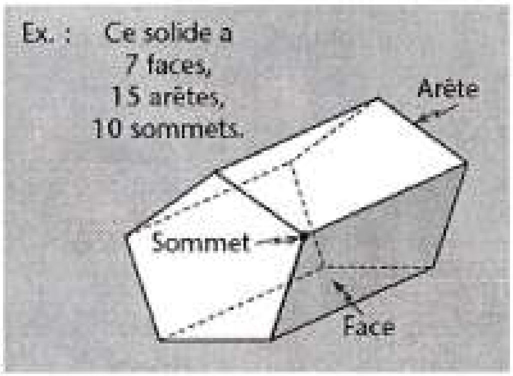


pyramide sphère cône octaèdre cube cylindre

On peut décrire un solide à l'aide de faces, d'arêtes et de sommets.

Face

Une face est une surface plane ou courbe délimitée par des arêtes.



Arête

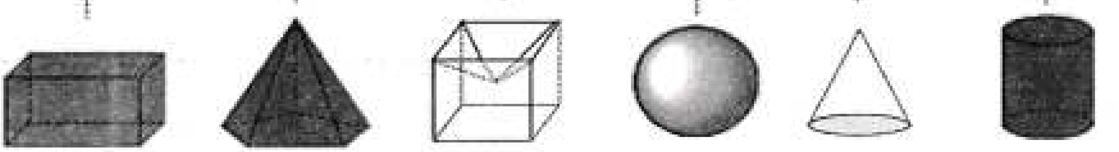
Une arête est la ligne d'intersection entre deux faces d'un solide.

Sommet

Un sommet est un point commun (rencontre) à au moins deux arêtes d'un solide.

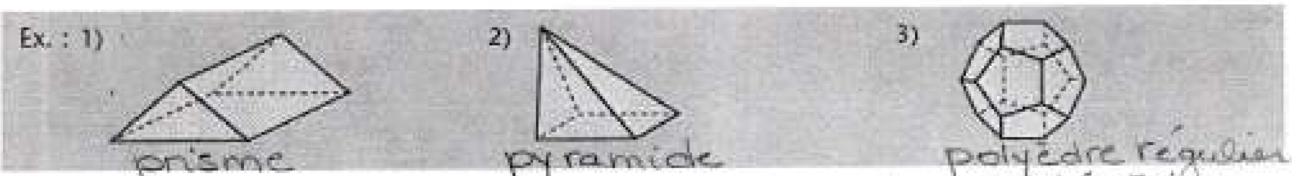
Classification des solides

- Solides
  - Polyèdres
    - Convexes
      - Prismes
      - Pyramides
    - Non convexes
  - Corps ronds
    - ~~Boules~~ sphère
    - Cônes
    - Cylindres



Les polyèdres

Un polyèdre est un solide limité par des faces planes qui sont des polygones.



* 5 polyèdres réguliers (toutes les faces sont des polygones réguliers)
- tétraèdre (4 △)
- Hexaèdre (cube)
- octaèdre (8 △)
- icosaèdre (20 △)

Voir p. 207 manuel {solides de Platon

Relation d'Euler

La relation d'Euler est une formule démontrant un lien entre le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes dans un polyèdre. On additionne le nombre de sommets au nombre de faces et on soustrait 2. La réponse est le nombre d'arêtes.

nombre de <u>S</u>ommets + nombre de <u>F</u>aces – <u>2</u> = nombre d'<u>A</u>rêtes

$$\mathbf{S + F - 2 = A} \quad \text{ou} \quad S + F - A = 2$$

Exemples :

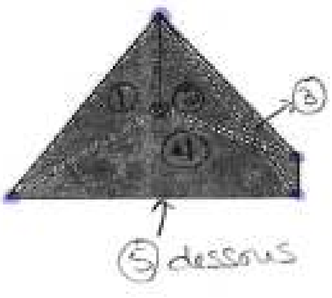
Nombre de **S**ommets : 10

Nombre de **F**aces : 7

Nombre d'**A**rêtes : 15

$\mathbf{S + F - 2 = A}$

$10 + 7 - 2 = 15$



Nombre de **S**ommets : 5

Nombre de **F**aces : 5

Nombre d'**A**rêtes : 8

$\mathbf{S + F - 2 = A}$

$5 + 5 - 2 = 8$

Exemples :

1) Combien de face un polyèdre qui a 18 arêtes et 12 sommets possède-t-il?

$A = 18$ $\quad S + F - 2 = A$ $\quad F = 18 - 10$

$S = 12$ $\quad 12 + F - 2 = 18$ $\quad F = 8$

$F = ?$ $\quad 10 + F = 18$

8 faces

2) Combien d'arêtes un polygone qui a 9 faces et 9 sommets possède-t-il?

$A = ?$ $\quad S + F - 2 = A$

$F = 9$ $\quad 9 + 9 - 2 = A$

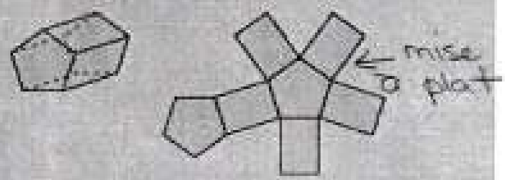
$S = 9$ $\quad 16 = A$

16 arêtes

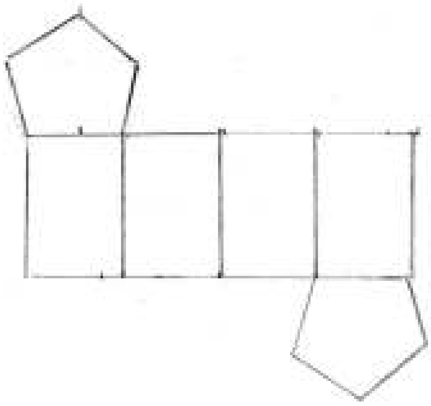
Développement d'un polyèdre

Le développement d'un polyèdre est la figure plane obtenue par la « mise à plat » de la surface du polyèdre. Dans le développement d'un polyèdre, chacune des faces doit être reliée à au moins une autre face par une arête commune.

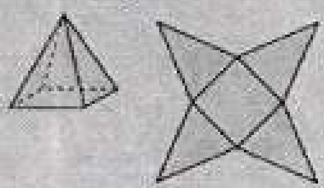
Ex. : 1) Voici un développement possible de ce prisme droit à base pentagonale :



ou

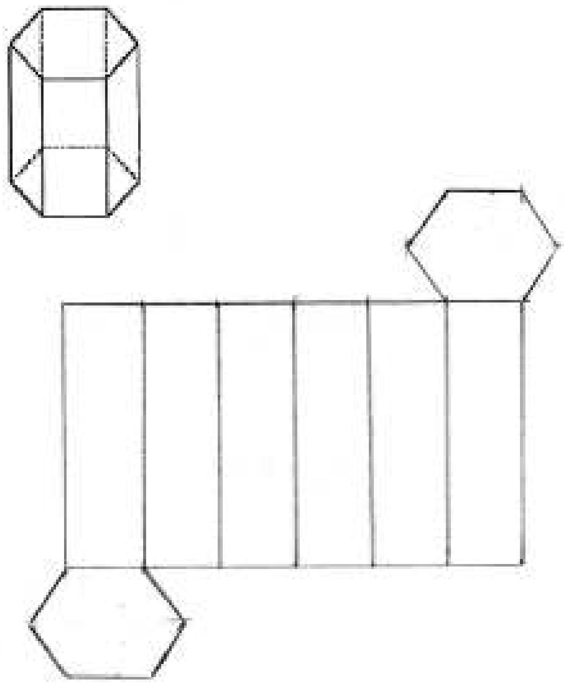


2) Voici un développement possible de cette pyramide droite à base carrée :

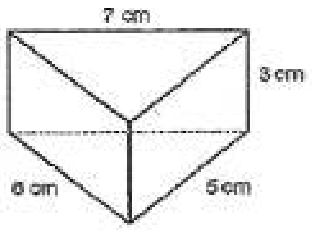


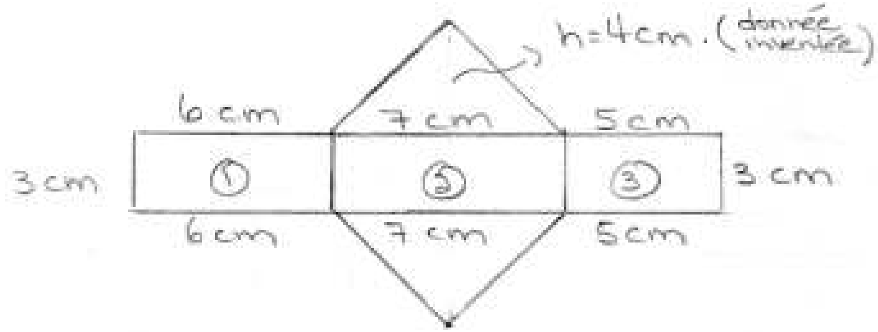
Exemples : Trace le développement des solides suivants :

a)



b)





* s'il y a des mesures sur le dessin, il faut les écrire sur le développement.

Calculer l'aire du développement

$A_T = A_{2\triangle} + A_{1} + A_{2} + A_{3}$

$= 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} + b \cdot h + b \cdot h + b \cdot h$

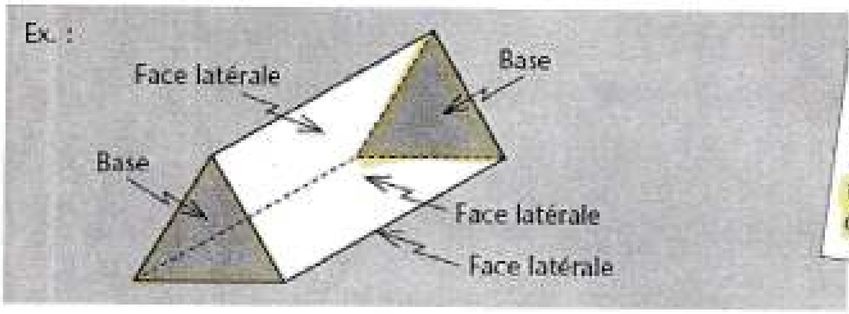
$= 2 \cdot \frac{7 \cdot 4}{2} + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 3$

$= 28 + 18 + 21 + 15$

$A_T = 82 \text{ cm}^2$

Prisme

Un prisme est un polyèdre ayant deux faces isométriques et parallèles, appelées les bases .Les rectangles qui relient ces deux bases sont appelés les faces latérales .

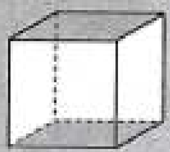


Un prisme a toujours autant de faces latérales que le polygone formant sa base a de côtés.

Δ = 3 côtés
donc 3 faces latérales

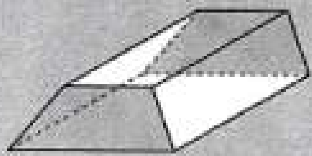
On identifie un prisme selon la forme de sa base.

Ex. : 1)



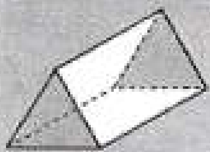
Prisme à base carrée

2)



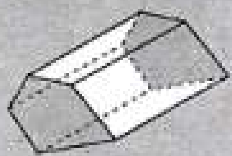
Prisme à base trapézoïdale

3)



Prisme à base triangulaire

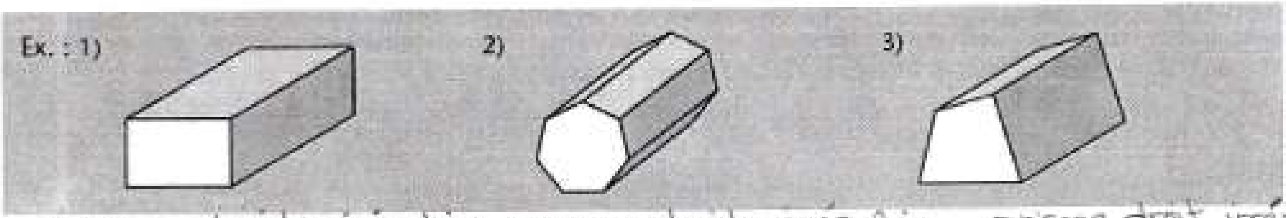
4)



Prisme à base pentagonale

Prisme droit (Vs prismes obliques) ** Voir google image.

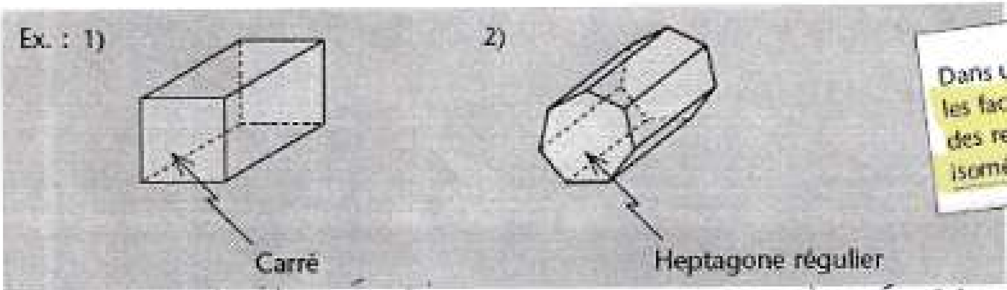
Un prisme droit est un prisme dont les faces latérales sont des rectangles



prisme droit irrégulier à base rectangulaire — prisme droit irrégulier à base heptagonale — prisme droit irrégulier à base trapézoïdale

Prisme régulier

Un prisme régulier est un prisme droit dont la base est un polygone régulier ________________.

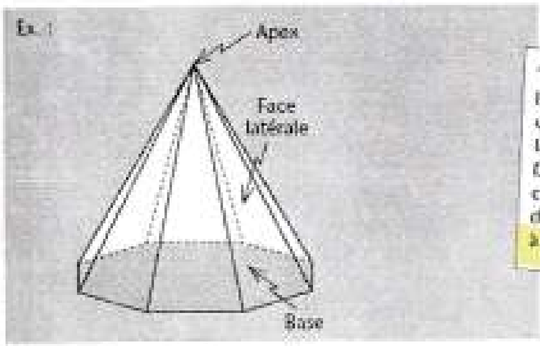


Dans un prisme régulier, les faces latérales sont des rectangles isométriques. **

prisme droit régulier à base carrée — prisme droit régulier à base heptagonale

Pyramide

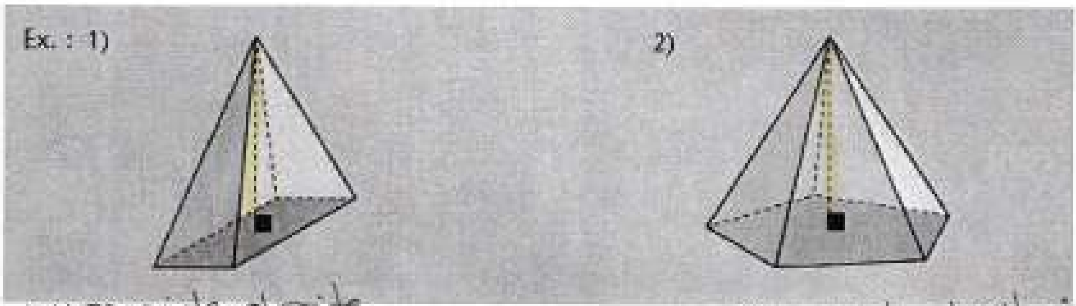
Une pyramide est un polyèdre constitué d'une seule base ayant la forme d'un polygone et dont les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun, appelé apex.



Tout comme pour les prismes, on identifie une pyramide selon la forme de sa base. Dans l'exemple ci-contre, il s'agit d'une pyramide à base octogonale. **

Pyramide droite (Vs pyramides obliques) → google image

Une pyramide droite est une pyramide dont le segment abaissé depuis l'apex, (somm perpendiculairement à la base, arrive au centre du polygone formant cette base.

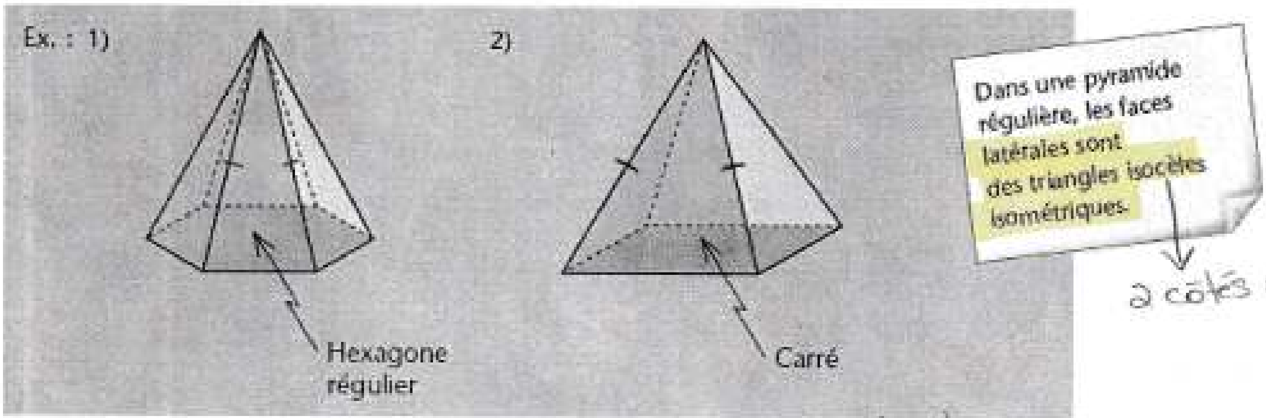


pyramide droite irrégulière à base rectangulaire (Δ pas égaux)

pyramide droite irrégulière à base pentagonale.

Pyramide régulière

Une pyramide régulière est une pyramide droite dont la base est un polygone régulier.



2 côtés égaux

pyramide droite régulière à base hexagonale

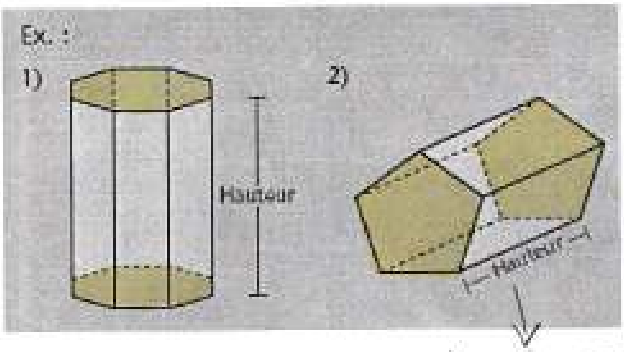
pyramide droite régulière à base carrée

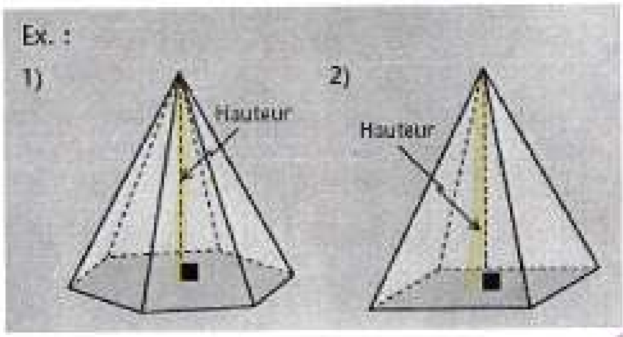
Aire d'un polyèdre

Hauteur

La hauteur **d'un prisme droit** est la distance entre les deux bases du prisme.

La hauteur **d'une pyramide droite** est la distance entre l'apex et la base de la pyramide.



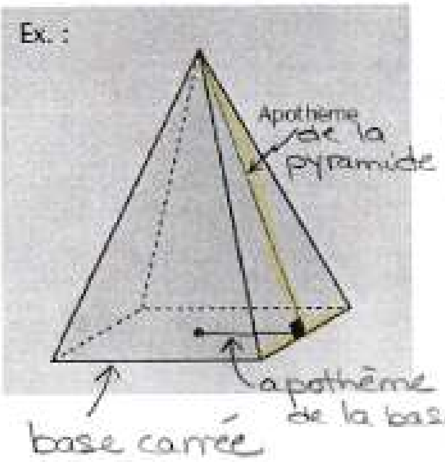


hauteur pas toujours verticale (haut en bas).

Apothème d'une pyramide régulière

L'**apothème** d'une pyramide régulière est le segment abaissé perpendiculairement de **l'apex** sur un des **côtés** du polygone formant la **base** de cette pyramide. Il correspond à la hauteur des triangles formant une face latérale.

*** Apothème de la pyramide = hauteur du Δ

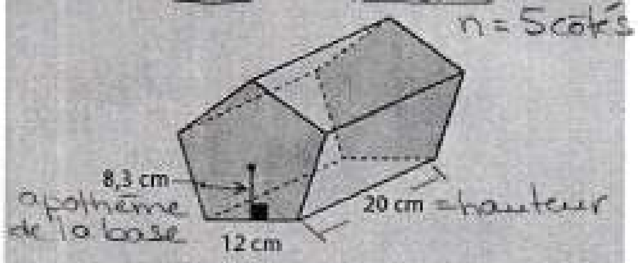


Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles. L'apothème arrive donc au milieu du côté du polygone formant la base.

Aire des prismes et des pyramides

(L'aire latérale des prismes est formée de rectangles)

Ex. : Prisme régulier à base pentagonale



$$A_{Totale} = A_{2bases} + A_{latérale}$$

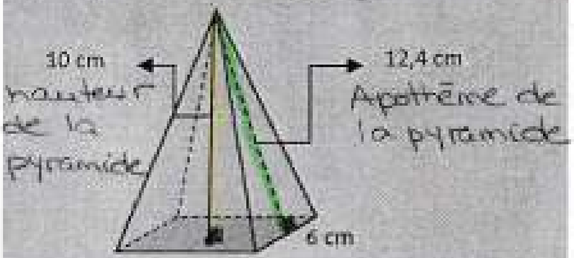
$$A_{2bases} = 2\left(\frac{can}{2}\right) = 2\left(\frac{12 \cdot 8,3 \cdot 5}{2}\right) = 2(249) = 498\ cm^2$$

$$A_{latérale} = 5(b \cdot h) = 5(12 \cdot 20) = 5(240) = 1200\ cm^2$$

$$A_{Totale} = 498 + 1200 = 1698\ cm^2$$

(L'aire latérale des pyramides est formée de triangles)

Ex. : Pyramide à base carrée



$$A_{Totale} = A_{base} + A_{latérale}$$

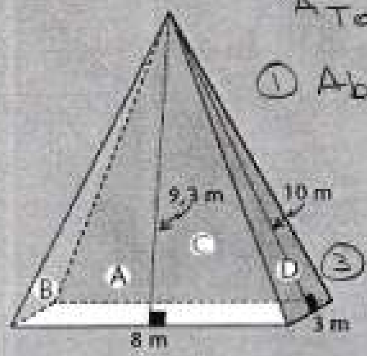
$$A_{base} = c \cdot c = 6 \cdot 6 = 36\ cm^2$$

$$A_{latérale} = 4\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 4\left(\frac{6 \cdot 12,4}{2}\right) = 4(37,2) = 148,8\ cm^2$$

$$A_{Totale} = 36 + 148,8 = 184,8\ cm^2$$

Exemple 1 :

Ex. : Pyramide à base rectangulaire



$A_{Tot} = A_{base} + A_{lat}$

① $A_{base} = b \cdot h$
$= 8 \cdot 3$
$= 24\ cm^2$

② $A_{lat} = 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$
$= 2\left(\frac{8 \cdot 9{,}3}{2}\right) + 2\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right)$
$= 2(37{,}2) + 2(15)$
$= 74{,}4 + 30$
$= 104{,}4\ m^2$

③ $A_{Totale} = 24 + 104{,}4$
$= 128{,}4\ m^2$

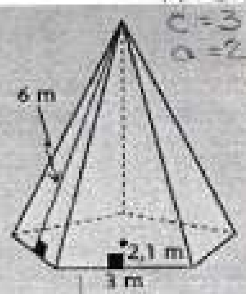
Exemple 2 :

$A_{Totale} = A_{base} + A_{latérale}$

$A_{base} = \frac{c\,a\,n}{2}$
$= \frac{3 \cdot 2{,}1 \cdot 5}{2}$
$= 15{,}75\ m^2$

$A_{lat} = 5\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$
$= 5\left(\frac{3 \cdot 6}{2}\right)$
$= 5(9)$
$= 45\ m^2$

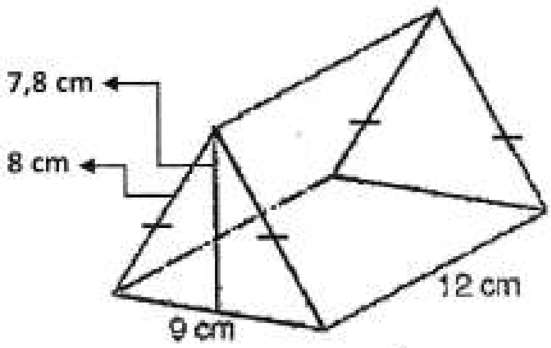
n = 5 côtés
c = 3 m
a = 2,1 m



↳ pentagone

$A_{Tot} = 15{,}75 + 45$
$= 60{,}75\ m^2$

Exemple 3 :



$A_{Totale} = A_{2\,bases} + A_{lat}$

$A_{2\,bases} = 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$
$= 2\left(\frac{9 \cdot 7{,}8}{2}\right)$
$= 70{,}2\ cm^2$

$A_{lat} = 2(b \cdot h) + (b \cdot h)$
$= 2(8 \cdot 12) + (9 \cdot 12)$
$= 2(96) + 108$
$= 192 + 108$
$= 300\ cm^2$

$A_{Totale} = 70{,}2 + 300$
$= 370{,}2\ cm^2$

Aire d'un solide décomposable

Pour calculer l'aire d'un solide décomposable, on peut le décomposer en solides plus simples.

* Déterminer les faces visibles

* si on peut prendre l'objet dans nos mains, dessous = visible ex : trophée, bijoux...

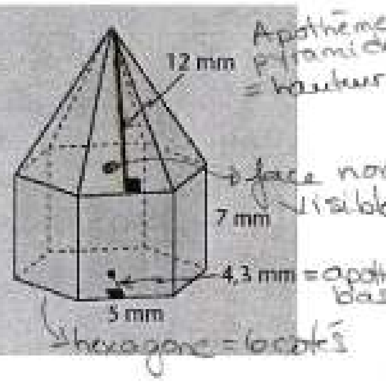
Ex. :

$$A_{\substack{lat\\pyramide}} = 6\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 6\left(\frac{5 \cdot 12}{2}\right) = 180\ mm^2$$

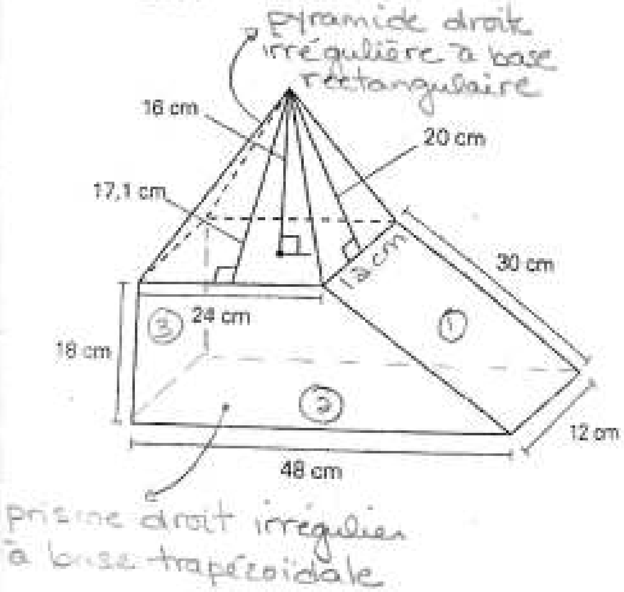
$$A_{\substack{lat\\prisme}} = 6(b \cdot h) = 6(5 \cdot 7) = 210\ mm^2$$

$$A_{\substack{base\\prisme}} = \frac{can}{2} = \frac{5 \cdot 4{,}3 \cdot 6}{2} = 64{,}5\ mm^2$$

$$A_{Tot} = 180 + 210 + 64{,}5 = 454{,}5\ mm^2$$



Ex :



$$A_{\substack{latérale\\pyramide}} = 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 2\left(\frac{24 \cdot 17{,}1}{2}\right) + 2\left(\frac{12 \cdot 20}{2}\right) = 410{,}4 + 240 = 650{,}4\ cm^2$$

$$A_{\substack{latérale\\prisme}} = (b \cdot h) + (b \cdot h) + (b \cdot h) = (12 \cdot 30) + (12 \cdot 48) + (12 \cdot 18) = 360 + 576 + 216 = 1152\ cm^2$$

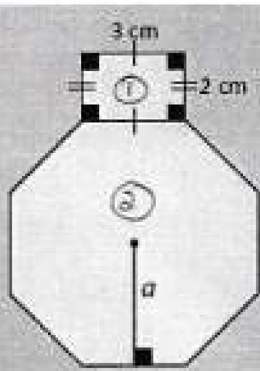
$$A_{\substack{2\,bases\\prismes}} = 2\left(\frac{(B+b) \cdot h}{2}\right) = 2\left(\frac{(48+24) \cdot 18}{2}\right) = 1296\ cm^2$$

$$A_{Totale} = 650{,}4 + 1152 + 1296 = 3098{,}4\ cm^2$$

Déterminer une mesure manquante

Exemple 4 :

L'aire de la figure ci-contre est de 49,2 cm².



$A_{Totale} = A_{①} + A_{②}$

$49{,}2 = b \cdot h + \frac{can}{2}$

$49{,}2 = 3 \cdot 2 + \frac{3 \cdot a \cdot 8}{2}$

$49{,}2 = \cancel{6} + 12a$

$-6 \quad \cancel{-6}$

$\frac{43{,}2}{12} = \frac{\cancel{12}a}{\cancel{12}}$

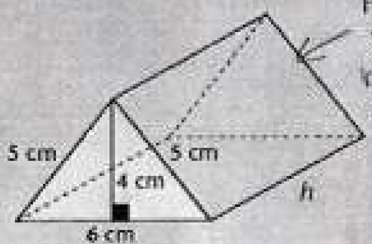
$3{,}6 = a$

$c = 3\ cm$
$n = 8$ côtés
$a = ?$

L'apothème mesure 3,6 cm.

Exemple5 :

L'aire totale du prisme à base triangulaire illustré ci-contre est de 139,2 cm².



Aire latérale = 2 formes de rectangles différentes

$A_{Tot} = A_{2 bases} + A_{latérale}$

$139{,}2 = 2\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + 2(b \cdot h) + (b \cdot h)$

$139{,}2 = 2\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) + 2(5 \cdot h) + (6 \cdot h)$

$139{,}2 = 24 + 10h + 6h$

$139{,}2 = \cancel{24} + 16h$

$-24 \quad \cancel{-24}$

$\frac{115{,}2}{16} = \frac{16h}{16}$

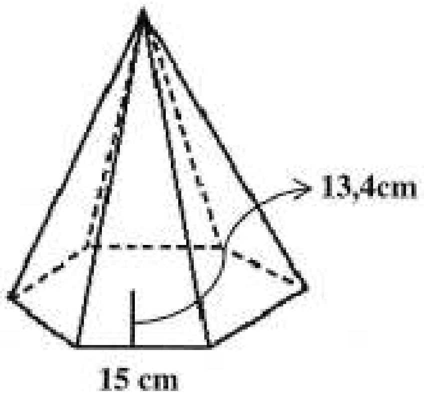
$7{,}2 = h$

La hauteur mesure 7,2 cm.

Exemple 6 :

Si l'aire latérale de la pyramide est de 945 cm², quelle est la mesure de l'apothème de la pyramide?

↳ = hauteur Δ.



$$A_{lat} = 6\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

$$945 = 6\left(\frac{15 \cdot h}{2}\right)$$

$$945 = 6(7{,}5 \cdot h)$$

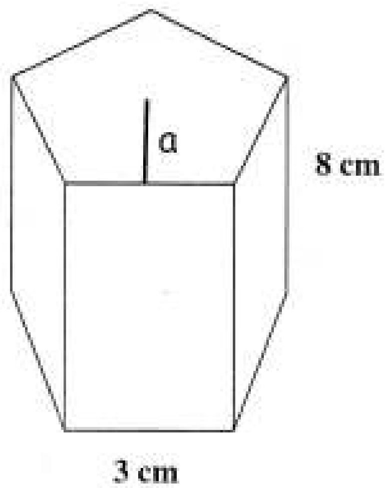
$$\frac{945}{45} = \frac{45h}{45}$$

$$21 = h$$

L'apothème de la pyramide mesure 21 cm

Exemple 7 :

Trouve la mesure de l'apothème sachant que l'aire totale est 210 cm².



a = ?
c = 3 cm
n = 5 côtés

$$A_{tot} = A_{2bases} + A_{latérale}$$

$$210 = 2\left(\frac{can}{2}\right) + 5(b \cdot h)$$

$$210 = 2\left(\frac{3 \cdot a \cdot 5}{2}\right) + 5(3 \cdot 8)$$

$$210 = 2(7{,}5a) + 5(24)$$

$$210 = 15a + 120$$

$$-120 \qquad\qquad -120$$

$$\frac{90}{15} = \frac{15a}{15}$$

$$6 = a$$

L'apothème mesure 6cm