Erreur #8 c)
Corrigé #10 a) b)
#15 règle a)

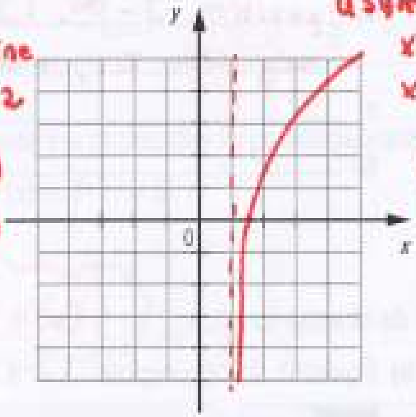
École secondaire le Carrefour
Maths SN5

Nom: CORRIGÉ
Gr : ______

DOCUMENT DE RÉVISION
Chapitre 3

1. Tracez le graphique de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2\log_3(x-1) + 2$

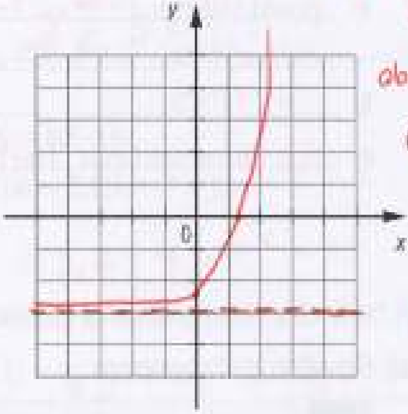


asymptote
$x = h$
$x = 1$

a positif
b positif

Abcisse à l'origine
$0 = 2\log_3(x-1)+2$
$-2 = 2\log_3(x-1)$
$-1 = \log_3(x-1)$
$3^{-1} = x-1$
$\frac{1}{3} = x-1$
$\frac{4}{3} = x$

b) $g(x) = 0{,}5(4)^x - 3$



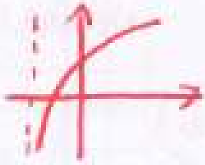
ordonnée à l'origine
$0{,}5(4)^0 - 3$
$-2{,}5$

abscisse à l'origine
$0 = 0{,}5(4)^x - 3$
$3 = 0{,}5(4)^x$
$6 = (4)^x$
$\log_4 6 = x$
$x = 1{,}29$

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminez :

1) l'équation de l'asymptote ;
2) le domaine ;
3) la variation ;
4) le signe ;
5) le zéro ;
6) la valeur initiale.

a) $f(x) = 6\log_4(x+7)$



Abcisse à l'origine
$\frac{1}{b} + h = \frac{1}{1} - 7 = -6$

1) $X = -7$
2) $]-7, +\infty$
3) croissante pour $]-7, +\infty$ ou pour tout son domaine.
4) positive $[-6, +\infty[$ négative $]-7, -6]$
5) -6
6) $\approx 8{,}42$

$F(0) = 6\log_4(0+7)$
$= 6\log_4 7$
$= 6 \cdot \frac{\log 7}{\log 4}$

b) $g(x) = 3(7)^x - 23$

Ordonnée à l'origine = $a + k = 3 - 23 = -20$

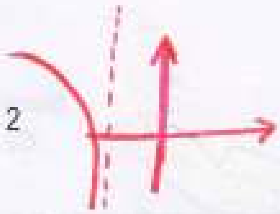
1) $y = -23$
2) $\mathbb{R}$
3) croissante sur $\mathbb{R}$
4) positive $[1{,}05 ; +\infty[$ négative $]-\infty, 1{,}05]$
5) $\approx 1{,}05$
6) -20

$0 = 3(7)^x - 23$
$23 = 3(7)^x$
$7{,}67 = 7^x$
$\log_7 7{,}67 = x$
$1{,}05 = x$

c) $h(x) = 5\log_{3^{-1}}(x+8) - 2$

d) $i(x) = {}^{-}4(1{,}5)^x + 6$

c) $h(x) = 5 \log_3 {}^{-}(x + 8) - 2$



Abcisse à l'origine

$0 = 5\log_3 {}^{-}(x+8) - 2$

$2 = 5\log_3 {}^{-}(x+8)$

$0{,}4 = \log_3 {}^{-}(x+8)$

$3^{0,4} = -(x+8)$

$-1{,}55 = x + 8$

$-9{,}55 = x$

1) $X = -8$

2) $]-\infty, -8[$

3) décroissante $]-\infty, -8[$

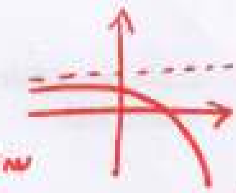
4) positive $]-\infty, -9{,}55]$

négative $[-9{,}55 ; -8[$

5) $-9{,}55$

6) Aucune valeur initiale

d) $i(x) = {}^{-}4(1{,}5)^x + 6$



ordonnée à l'origine

$a + K = 2$

Abcisse à l'origine

$0 = -4(1{,}5)^x + 6$

$-6 = -4(1{,}5)^x$

$1{,}5 = (1{,}5)^x$

$1 = x$

1) $y = 6$

2) $\mathbb{R}$

3) décroissante sur $\mathbb{R}$

4) positive $]-\infty, 1]$

négative $[1, +\infty[$

5) 1

6) 2

3. À l'aide des renseignements fournis, établissez la règle de chaque fonction.

a) Équation de l'asymptote : $y = {}^{-}12$

x	${}^{-}1$	0	1	2
y	${}^{-}7$	8	68	308

Asymptote $y = K$

donc $K = -12$

Ordonnée à l'origine $= a + K$

Donc $a + K = 8$

$a - 12 = 8$

$a = 20$

$f(x) = 20(c)^x + -12$

$68 = 20(c)^1 + -12$

$80 = 20c$

$4 = c$

$f(x) = 20(4)^x - 12$

b) Équation de l'asymptote : $x = {}^{-}1$

x	$-\frac{8}{9}$	0	2	8
y	0	${}^{-}2$	${}^{-}3$	${}^{-}4$

Asymptote : $x = h$ donc $h = -1$

Abcisse à l'origine : $\frac{1}{b} + h = -\frac{8}{9}$

$\frac{1}{b} - 1 = -\frac{8}{9}$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{9}$

$b = 9$

$f(x) = \log_c 9(x+1)$

$-3 = \log_c 9(2+1)$

$-3 = \log_c 27$

$c^{-3} = 27$

$\frac{1}{c^3} = 27$

$\frac{1}{27} = c^3$

$\frac{1}{3} = c$

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} 9(x+1)$

4. Dans chaque cas, déterminez la valeur de x.

a) $216 = x^3$

$x = \sqrt[3]{216} = 6$

b) $625 = 5^x$

$\log_5 625 = x$

$\frac{\log 625}{\log 5} = 4$

c) $x = \log_3 9$ $\longrightarrow$ $\frac{\log 9}{\log 3} = 2$

$3^x = 9$

$x = 2$

d) $\log_x 64 = 6$

$x^6 = 64$

$x = \sqrt[6]{64} = 2$

e) $\log_4 x = {}^-3$

$4^{-3} = x$

$0{,}015625 = x$

f) $8^3 = x$

$512 = x$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$

$\hookrightarrow \frac{\log 8}{\log \frac{1}{2}} = -3$

h) $\log_x 49 = 1$

$x^1 = 49$

$x = 49$

5. Écrivez les règles des fonctions suivantes sous la forme $f(x) = ac^x + k$.

a) $f(x) = 7^{x+1} - 5$

$= 7^1 \cdot 7^x - 5$

$= 7(7)^x - 5$

b) $f(x) = 5{,}2(4)^{x+2} + 13$

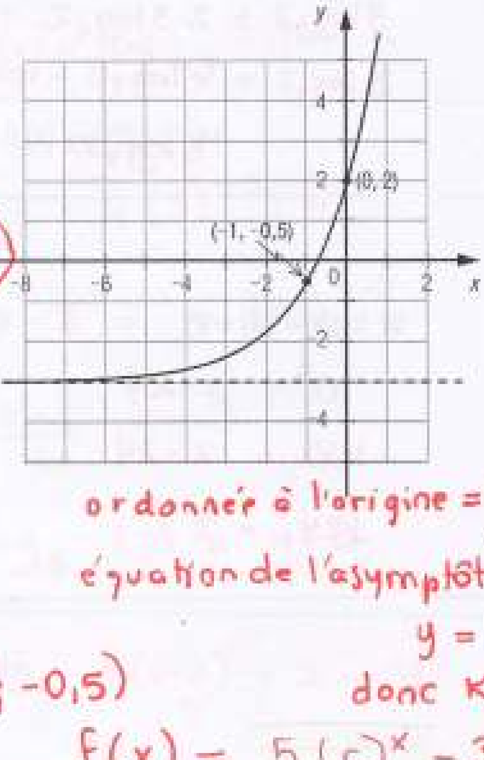
$= 5{,}2 \cdot 4^2 \cdot 4^x + 13$

$= 5{,}2 \cdot 16 \cdot 4^x + 13$

$= 83\,(4)^x + 13$

6. Déterminez la règle de chacune des fonctions exponentielles ou logarithmiques représentées ci-dessous.

a)



$f(x) = 5(2)^x - 3$

ordonnée à l'origine $= a + K = 2$

$a + {-3} = 2$

équation de l'asymptote $=$ $a = 5$

$y = K$

donc $K = -3$

Point $(-1; -0{,}5)$

$f(x) = 5\,(c)^x - 3$

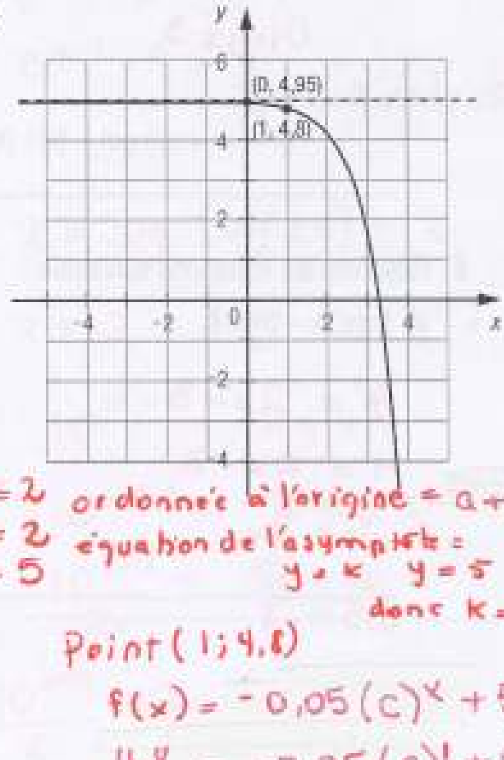
$-0{,}5 = 5\,(c)^{-1} - 3$

$2{,}5 = 5 \cdot c^{-1}$

$0{,}5 = c^{-1}$

$0{,}5 = \frac{1}{c} \rightarrow c = \frac{1}{0{,}5} = 2$

b)



ordonnée à l'origine $= a + K = 4{,}95$

équation de l'asymptote $=$ $a + 5 = 4{,}95$

$y = K$ $\quad y = 5$ $\quad a = -0{,}05$

donc $K = 5$

Point $(1; 4{,}8)$

$f(x) = -0{,}05\,(c)^x + 5$

$4{,}8 = -0{,}05\,(c)^1 + 5$

$-0{,}2 = -0{,}05\,(c)^1$

$4 = c^1$

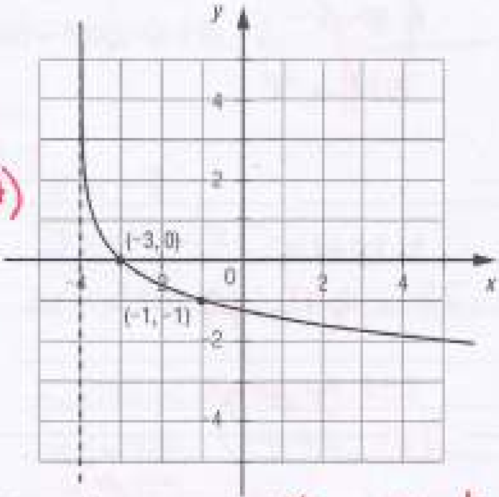
$f(x) = -0{,}05\,(4)^x + 5$

Equation asymptote : $x = h$
donc $h = -2$

$\frac{1}{b} + h = -1$

$\frac{1}{b} - 2 = -1 \quad \frac{1}{b} = 1 \quad b = 1$

c)



$f(x) = \log_c 1(x+4)$

Point $(-1,-1)$

$-1 = \log_c(-1+4)$

$-1 = \log_c 3$

$c^{-1} = 3$

$\frac{1}{c} = 3$

$c = \frac{1}{3}$

Equation asymptote : $x = h$ donc $h = -4$

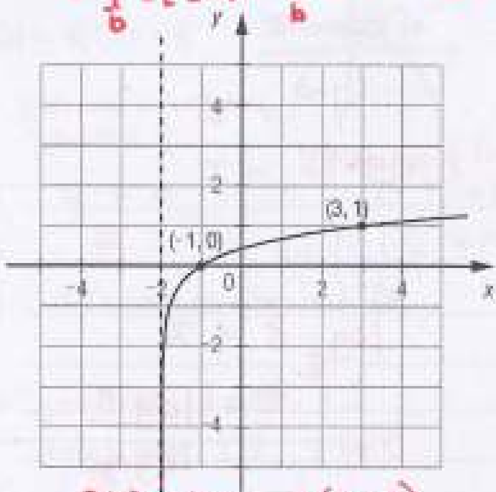
Abscisse à l'origine : $\frac{1}{b} + h = -3$

$\frac{1}{b} + -4 = -3$

$\frac{1}{b} = 1 \rightarrow b = 1$

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$

d)



$f(x) = \log_c 1(x+2)$

Point $(3,1)$

$1 = \log_c 1(3+2)$

$1 = \log_c 5$

$c^1 = 5$

$f(x) = \log_5 (x+$

7. Récrivez chacune des expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme de la forme $\log_c m^n$.

a) $2 \log_x 3 - \log_x 3^2$

$2\log_x 3 - 2\log_x 3$

$0\log_x 3$

0

b) $3 \log_4 2 + 2 \log_4 8 - \log_4 2$

$3\log_4 2 + 2\log_4 2^3 - \log_4 2$

$3\log_4 2 + 2 \cdot 3\log_4 2 - \log_4 2$

$3\log_4 2 + 6\log_4 2 - \log_4 2$

$8\log_4 2$

8. Résolvez les équations suivantes.

a) $\log_4(2x - 3) = 1$

$4^1 = 2x - 3$

$4 = 2x - 3$

$7 = 2x$

$3{,}5 = x$

b) $\log(x - 24) = 2$

$10^2 = x - 24$

$100 = x - 24$

$124 = x$

base

c) $\log 5(x + 14)^2 = 6$

$5^6 = (x+14)^2$

$15625 = (x+14)^2$

$\sqrt{15625} = x + 14$

$125 = x + 14$

$111 = x$

d) $3^{4x-1} = 78$

$\log_3 78 = 4x - 1$

$\dfrac{\log 78}{\log 3} = 4x - 1$

$3{,}97 \approx 4x - 1$

$4{,}97 \approx 4x$

$1{,}24 \approx x$

9. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez la règle de sa réciproque.

a) $f(x) = 0{,}4^x + 16$

$x = 0{,}4^y + 16$

$x - 16 = 0{,}4^y$

$\log_{0,4} x - 16 = y$

$f^{-1}(x) = \log_{0,4} x - 16$

b) $g(x) = \ln(x+9) + 7$

$x = \ln(y+9) + 7$

$x - 7 = \ln(y+9)$

$\log_e y + 9 = x - 7$

$e^{x-7} = y + 9$

$e^{x-7} - 9 = y$

$g^{-1}(x) = e^{x-7} - 9$

c) $h(x) = 6(5)^{x-3} + 8$

$x = 6(5)^{y-3} + 8$

$x - 8 = 6(5)^{y-3}$

$\dfrac{x-8}{6} = 5^{y-3}$

$\log_5 \dfrac{x-8}{6} = y - 3$

$\log_5 \frac{1}{6}(x-8) + 3 = y$

$\log_5 \frac{1}{6}(x-8) + 3 = h^{-1}(x)$

d) $i(x) = \log(2x + 4) - 12$

$x = \log(2y+4) - 12$

$x + 12 = \log(2y+4)$

$10^{x+12} = 2y + 4$

$10^{x+12} = 2(y+2)$

$\dfrac{10^{x+12}}{2} = y + 2$

$\dfrac{10^{x+12}}{2} - 2 = y$

$\frac{1}{2}\left(10^{x+12}\right) - 2 = i^{-1}(x)$

10. Résolvez les équations suivantes.

a) $\log_2 32 + \log_3(x-6) + \log_4 16 = 11$

$\frac{\log 32}{\log 2} + \log_3(x-6) + \frac{\log 16}{\log 4} = 11$

$5 + \log_3(x-6) + 2 = 11$

$\log_3(x-6) = 4$

$3^4 = x-6$

$81 = x-6$

$x = 87$

b) $(\ln e^2)(\ln x^3) - \ln x + 3 = 7$

$(2)(\ln x^3) - \ln x = 4$

$2 \cdot 3\ln x - \ln x = 4$

$6\ln x - \ln x = 4$

$5\ln x = 4$

$\ln x = 0,8$

$e^{0,8} = x$

$x = 2,23$

c) $\log_3 x^6 + \log_3 x = \log_3 x + 1$

$6\log_3 x + \log_3 x - \log_3 x = 1$

$6\log_3 x = 1$

$\log_3 x = \frac{1}{6}$

$3^{\frac{1}{6}} = x$

$x \approx 1,2$

d) $\log_5(x+1)^2 + \log_5(x+1) = 2$

$2\log_5(x+1) + \log_5(x+1) = 2$

$3\log_5(x+1) = 2$

$\log_5(x+1) = \frac{2}{3}$

$5^{\frac{2}{3}} = x+1$

$2,92 \approx x+1$

$1,92 \approx x$

11. Résolvez les inéquations suivantes.

a) $1,4(6)^x - 10 \geq 40,4$

$1,4(6)^x - 10 = 40,4$

$1,4(6)^x = 50,4$

$(6)^x = 36$

↓

$\log_6 36 = x$

$2 = x$

Point-test (0)

$1,4(6)^0 - 10 \geq 40,4$

$-8,6 \geq 40,4$

FAUX

$x \geq 2$

b) $5\log_4(x+9) < 12,5$

$5\log_4(x+9) = 12,5$

$\log_4(x+9) = 2,5$

↓

$4^{2,5} = x+9$

$32 = x+9$

$23 = x$

Restriction $x+9 > 0$

$x > -9$

Point-test (0)

$5\log_4(0+9) < 12,5$

$7,9 < 12,5$ VRAI

$-9 < x < 23$

c) $^{-}3(5)^x + 11 > {}^{-}4$

$-3(5)^x + 11 = -4$

$-3(5)^x = -15$

$(5)^x = 5$

$\log_5 5 = x$

$1 = x$

$x < 1$

Point test (0)

$-3(5)^0 + 11 > -4$

$8 > -4$ VRAI

d) $4 \log_{\frac{1}{6}}(x + 7) + 5 \leq {}^{-}3$

$4 \log_{\frac{1}{6}}(x+7) + 5 = -3$

$4 \log_{\frac{1}{6}}(x+7) = -8$

$\log_{\frac{1}{6}}(x+7) = -2$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = x + 7$

$36 = x + 7$

$29 = x$

$x \geq 2$

Restriction

$x + 7 > 0$

$x > -7$

Point test (0)

$4 \log_{\frac{1}{6}}(0+7) + 5 \leq$

$0,66 \leq$

FAU

12. Selon une étude démographique, la population d'une ville de banlieue de 25 000 habitants augmente chaque année de 5 % par rapport à l'année précédente.

a) Déterminez la règle de la fonction associée à cette situation.

$100\% + 5\% = 105\% = \frac{105}{100} = 1,05$

$y = 25000\,(1,05)^x$

b) Quelle sera la population de cette ville dans 5 ans ?

$y = 25000\,(1,05)^5$

$\approx 31\,907,04$

Donc environ 31 907 habitants

c) Dans combien d'années la population de la ville atteindra-t-elle 35 000 habitants ?

$35\,000 = 25\,000\,(1,05)^x$

$1,4 = (1,05)^x$

$\log_{1,05} 1,4 = x$

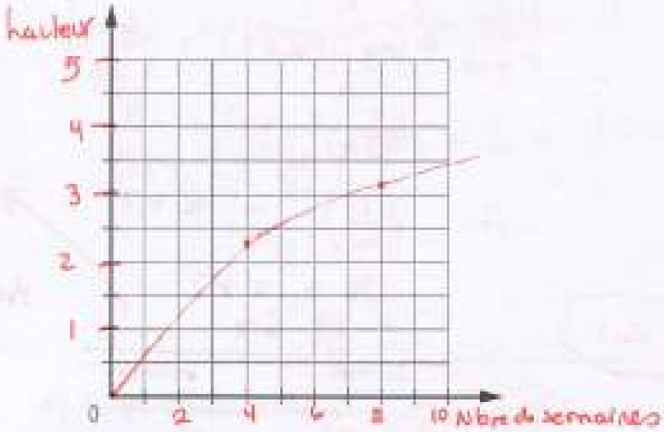
$\frac{\log 1,4}{\log 1,05} = x$

$6,9 \approx x$

Environ 6,9 années

13. Des biologistes ont découvert que la hauteur h (en dm) d'une plante varie selon la règle $h = \log_2(t + 1)$, où t représente le temps écoulé (en semaines).

a) Représentez graphiquement cette situation.



b) Quelle est la hauteur de la plante au bout de :

1) 4 semaines ?

$h = \log_2(4+1) = \log_2(5) \approx 2{,}32\,dm$

2) 8 semaines ?

$h = \log_2(8+1) = \log_2 9 \approx 3{,}17\,dm$

c) À quel moment la hauteur de la plante sera-t-elle de 2,8 dm ?

$2{,}8 = \log_2(t+1)$

$2^{2{,}8} = t+1 \rightarrow 6{,}96 \approx t+1 \rightarrow t \approx 5{,}96$

Environ 5,96 semain

d) Pendant combien de temps la hauteur de la plante sera-t-elle inférieure à 15 cm ?

$\log_2(t+1) < 1{,}5$ $\quad$ $\log_2(t+1) = 1{,}5$

$2^{1{,}5} = t+1$

$2{,}83 = t+1 \rightarrow t \approx 1{,}83$

↳ 1,5 dm

Environ 1,83 semaine

e) Quelle règle permet de déterminer le temps de croissance d'une plante en fonction de sa hauteur ?

$h = \log_2(t+1)$

$2^h = t+1 \rightarrow t = 2^h - 1$

14. Debout sur une chaise, un enfant fait rebondir une balle de caoutchouc sur une table de 1,8 m de hauteur. Lorsqu'il laisse tomber la balle, celle-ci se trouve à 2 m au-dessus de la table. À chacun de ses rebonds, la balle perd 25 % de sa hauteur par rapport au rebond précédent.

Déterminez la règle de la fonction exponentielle associée à cette situation.

$100\% - 25\% = 75\% = 0{,}75$

$h = 2(0{,}75)^b + 1{,}8$

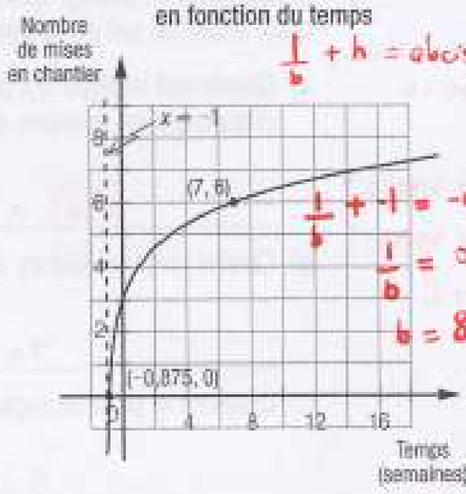
b = nombre de rebonds

h = hauteur de la balle par rapport au sol

Asymptote
$x = h$ donc $h = -1$

15. Une municipalité propose des mesures fiscales afin d'augmenter le nombre de nouvelles mises en chantier de maisons individuelles sur son territoire. Le graphique ci-contre présente les prévisions de la municipalité concernant cette mesure.

Nombre de mises en chantier hebdomadaires en fonction du temps



$\frac{1}{b} + h =$ abcisse à l'origine

$\frac{1}{b} + -1 = -0,875$

$\frac{1}{b} = 0,125$

$b = 8$

$y = \log_c 8(x+1)$

$6 = \log_c 8(7+1)$

$6 = \log_c 64$

$c^6 = 64$

$c = 2$

a) Combien de semaines après la mise en place de cette mesure y aura-t-il 8 nouvelles mises en chantier hebdomadaires ?

$y = \log_2 8(x+1)$

$8 = \log_2 8(x+1)$

$2^8 = 8(x+1)$

$32 = x+1$ $\quad x = 31$ semaines

b) La municipalité veut obtenir 12 nouvelles mises en chantier hebdomadaires dans 5 ans. Cet objectif est-il réaliste ? Expliquez votre réponse.

5 ans $= 5 \times 52$ semaines $= 260$ semaines

$y = \log_2 8(260+1)$

$y = \log_2 2088 \rightarrow \frac{\log 2088}{\log 2} = 11,02$ mises en chantier

Non pas réaliste car dans 5 ans 11,02 mises en chantier

16. Pour les études de son fils, Sylvie place 5000 $ à un taux d'intérêt de 6 % composé annuellement. Elle garde également un avoir de 457 $ qu'elle lui remettra lorsqu'il utilisera le placement de 5000 $.

a) Établissez la règle de la fonction qui permet de calculer l'avoir total de son fils en fonction du temps (en mois).

$y = 5000(1,06)^{\frac{x}{12}} + 457$

x : temps en mois $\quad y$: avoir total en $

b) Lorsque son fils aura 18 ans, Sylvie lui remettra une somme de 13 790,75 $. Quel âge avait son fils au moment du placement initial ?

$13\,790,75 = 5000(1,06)^{\frac{x}{12}} + 457$

$13\,333,75 = 5000(1,06)^{\frac{x}{12}}$

$2,6675 = (1,06)^{\frac{x}{12}} \longrightarrow \log_{1,06} 2,6675 = \frac{x}{12}$

$16,83 = \frac{x}{12}$

$201,96 = x$

≈ 202 mois

$(18 \times 12) - 202 =$

$216 - 202 =$ 14 mois

Age lors du placement

c) Déterminez le temps nécessaire pour que le placement initial de 5000 $ double.

$10\,000 = 5000(1,06)^{\frac{x}{12}} + 457$

$1,9086 = (1,06)^{\frac{x}{12}}$

$\log_{1,06} 1,9086 = \frac{x}{12} \rightarrow \frac{x}{12} = 11,09 \rightarrow x = 133,08$

≈ 133 mois

d) Si son fils utilise plutôt cet argent pour acheter sa première maison à 26 ans, quel montant pourra-t-il investir dans l'achat de sa résidence ? 26 ans $= 26 \times 12 = 312$ mois

Durée du placement : $312 - 14 = 298$ mois

$y = 5000(1,06)^{\frac{298}{12}} + 457$

$= 21\,708,96$ $

17. La table de valeurs ci-contre montre l'évolution d'un des placements d'Audrey. La règle qui permet de modéliser cette situation est de la forme $f(x) = ac^x$.

Valeur du placement

Temps (années)	Valeur ($)
0	4000
1	4200
2	4410
3	4630,50

Valeur initiale 4000

$f(x) = 4000c^x$

$4200 = 4000c^1$

$1,05 = c$

a) Quelle est la règle qui permet de calculer la valeur du placement en fonction du temps ?

$f(x) = 4000\ (1.05)^x$

b) Quelle somme Audrey a-t-elle placée initialement ?

4000

c) Quel est le pourcentage d'intérêt annuel de ce placement ?

5%

d) Quelle est la valeur du placement au bout de :

1) 7 ans ? $4000\ (1.05)^7$

5628,40 $

2) 11 ans ? $4000\ (1.05)^{11}$

6841,36 $

e) Dans combien d'années le placement vaudra-t-il 5910 $?

$5910 = 4000\ (1.05)^x$

$1,48 = (1.05)^x \rightarrow \log_{1.05} 1,48 = x \rightarrow 8,04$

Environ 8 ans

f) Quelle est la règle de la fonction qui permet de calculer le temps écoulé en fonction de la valeur du placement ?

$y = 4000\ (1.05)^x$

$\downarrow$

$x = 4000\ (1.05)^y$

$\frac{x}{4000} = (1.05)^y \rightarrow \log_{1.05} \frac{x}{4000} = y$

18. Les profits quotidiens d'un magasin, à partir du moment où il ouvre ses portes, varient selon la règle $y = 10\,000 \log_4(x + 8) - 15\,000$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'ouverture et y, les profits (en $).

a) Déterminez les profits 3 h après l'ouverture.

$y = 10000 \log_4 (3+8) - 15000$

$y = 2297,16$ $

b) À quel moment les profits sont-ils de 5850 $?

$5850 = 10000 \log_4 (x+8) - 15000$

$20850 = 10\,000 \log_4 (x+8)$

$2,085 = \log_4 (x+8) \rightarrow 4^{2,085} = x+8$

$18 = x+8$

$10 = x$

$\downarrow$

10 heures

c) Si le magasin ouvre ses portes de 9 h à 21 h, déterminez ses profits à la fin de la journée.

9h à 21h → 12hrs

$y = 10000 \log_4 (12+8) - 15000$

$y = 6609,64$ $