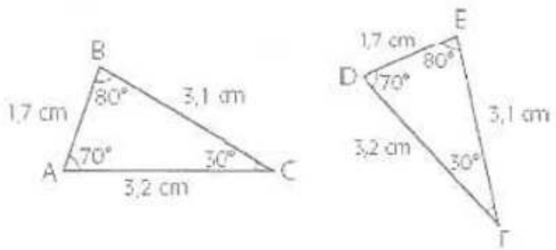
NOTES DE COURS - CHAPITRE 2 → SECTION 1

Les triangles isométriques

Deux triangles isométriques ont leurs éléments homologues (associés) (trois angles et trois côtés) isométriques.

Exemple :

Les triangles **ABC** et **DEF** sont isométriques, car leurs angles homologues sont isométriques et leurs côtés homologues sont isométriques .



Le symbole d'égalité concerne des nombres alors que le symbole d'isométrie (≅)concerne des objets géométriques .
On a donc m $\overline{AB}$ = m $\overline{DE}$ mais $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

On a $\angle$**A** ≅ $\angle$**D**, $\angle$**B** ≅ $\angle$**E** et $\angle$**C** ≅ $\angle$**F**

et $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ et $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

On écrit alors Δ**ABC** ≅ Δ**DEF** .

Remarques :

– Le symbole « ≅ » se lit « est isométrique à ».

– Habituellement, on nomme des triangles isométriques selon leurs sommets homologues . Donc, si Δ**ABC** ≅ Δ**DEF**, on peut affirmer que l'angle **A** est homologue à l'angle **D**, que l'angle **B** est homologue à l'angle **E** et que l'angle **C** est homologue à l'angle **F**.

Les conditions minimales d'isométrie de triangles

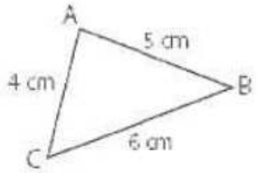
Pour pouvoir affirmer que deux triangles sont isométriques, il n'est pas nécessaire de vérifier que tous leurs côtés homologues et tous leurs angles homologues sont isométriques . Il suffit de s'assurer que les triangles respectent une des trois conditions minimales suivantes .

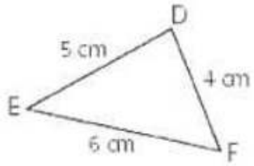
1ère La condition minimale d'isométrie CCC

Deux triangles ayant leurs côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques .

Exemple :

$\triangle$**ABC** $\cong$ $\triangle$**DEF**, car $\overline{\mathbf{AB}} \cong \overline{\mathbf{DE}}$, $\overline{\mathbf{BC}} \cong \overline{\mathbf{EF}}$ et $\overline{\mathbf{CA}} \cong \overline{\mathbf{FD}}$.



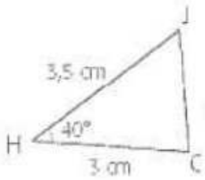


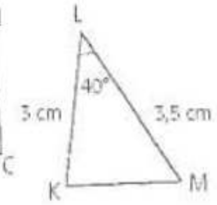
2e La condition minimale d'isométrie CAC

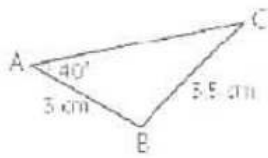
Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques

Exemple :

$\triangle$**GHJ** $\cong$ $\triangle$**KLM**, car $\angle$ **H** $\cong$ $\angle$ **L**, $\overline{\mathbf{GH}} \cong \overline{\mathbf{KL}}$ et $\overline{\mathbf{JH}} \cong \overline{\mathbf{ML}}$.







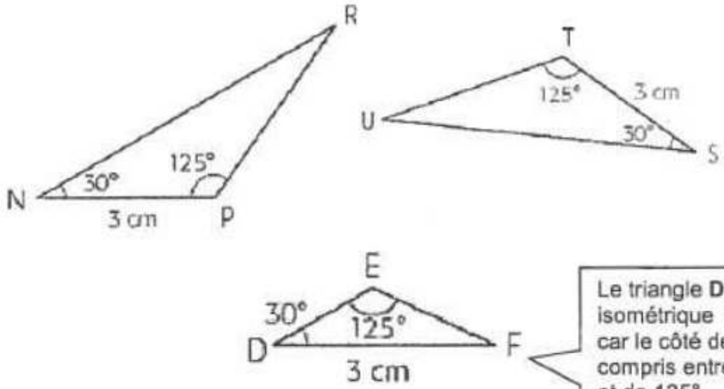
Le triangle **ABC n'est pas** isométrique au triangle **GHJ**, car l'angle de 40° n'est pas compris entre les côtés de 3 cm et de 3,5 cm .

La condition minimale d'isométrie ACA

Deux triangles ayant un côté isométrique compris entre 2 angles homologues isométriques.
sont nécessairement isométriques.

Exemple :

ΔNPR ≅ ΔSTU, car **∠N ≅ ∠S**, **∠P ≅ ∠T** et **$\overline{NP}$ ≅ $\overline{ST}$**.



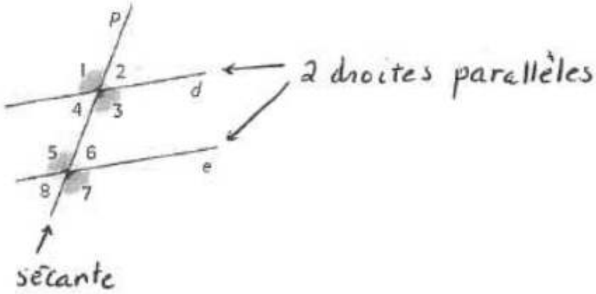
Le triangle **DEF n'est pas** isométrique au triangle **NPR**, car le côté de 3 cm n'est pas compris entre les angles de 30° et de 125°.

La recherche de mesures manquantes

Les relations entre les angles

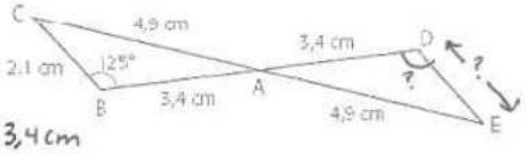
Plusieurs paires d'angles sont isométriques lorsqu'une sécante coupe deux droites parallèles.

- Les angles 1 et 3, 2 et 4, 5 et 7, 6 et 8 sont opposés par le sommet.
- Les angles 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8 sont correspondants.
- Les angles 3 et 5, 4 et 6 sont alternes-internes.
- Les angles 1 et 7, 2 et 8 sont alternes-externes.



* Les 2 angles alternent par rapport à la sécante.
* Les 2 angles sont « internes » par rapport aux parallèles.
* Les 2 angles sont « externes » par rapport aux parallèles.
* Les angles correspondants n'alternent pas, ne sont ni internes ni ext.

Exemple :



Quelle est la mesure du segment **DE** et de l'angle **D** dans la figure ci-contre ?

hypothèse : $m\ \overline{CB} = 2,1cm$ $m\ \overline{AD} = 3,4cm$
$m\ \overline{BA} = 3,4cm$ $m\ \overline{AE} = 4,9cm$
$m\ \overline{AC} = 4,9cm$
(Ce qui est donné, connu.)

Conclusion : $m\ \overline{DE} =$
$m < D =$

Étape	Affirmation	Justification
1. Démontrer que les triangles sont isométriques en s'assurant qu'une condition minimale d'isométrie est respectée .	C m $\overline{AB}$ = m $\overline{AD}$ ou $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	par hypothèse (déjà connu)
	A ∠CAB ≅ ∠EAD ou m < CAB = m < EAD	2 < opposés par le sommet sont toujours isométriques
	C	Par hypothèse (déjà donné)
donc :	△ ΔABC ≅ ΔADE	Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques (condition minimale CAC) .
2. Déduire les mesures manquantes à partir de celles des éléments homologues .	m $\overline{DE}$ = m $\overline{CB}$ donc m $\overline{DE}$ = 2,1cm	→ car 2 Δ isométriques ont nécessairement leurs éléments homologues isométriques
	m ∠D = m < B m < D = 125°	→ car 2 Δ isométriques ont nécessairement leurs éléments homologues isométriques

* éléments : angles et côtés

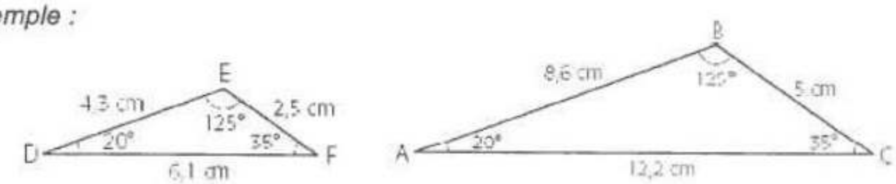
NOTES DE COURS - CHAPITRE 2 → SECTION 2

Les triangles semblables

Deux triangles sont semblables si leurs angles homologues sont isométriques et si les mesures de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité (lien multiplicatif) correspond alors au rapport de similitude (k) des deux triangles.

Exemple :



Les triangles **ABC** et **DEF** sont semblables, car leurs angles homologues sont isométriques et les mesures de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

On a $\angle \mathbf{A} \cong \angle \mathbf{D}$, $\angle \mathbf{B} \cong \angle \mathbf{E}$ et $\angle \mathbf{C} \cong \angle \mathbf{F}$

préférable : $\frac{m + \text{grand } \triangle}{m + \text{petit } \triangle}$

et $\dfrac{m\ \overline{AB}}{m\ \overline{DE}} = \dfrac{m\ \overline{BC}}{m\ \overline{EF}} = \dfrac{m\ \overline{CA}}{m\ \overline{FD}} = 2 = k.$

$\left(\text{ou} \quad \dfrac{m\ \overline{DE}}{m\ \overline{AB}} = \dfrac{m\ \overline{EF}}{m\ \overline{BC}} = \dfrac{m\ \overline{FD}}{m\ \overline{CA}} = k = \dfrac{1}{2} \right)$

Des triangles semblables sont isométriques lorsque k = 1.

On écrit alors $\triangle$**ABC** ~ $\triangle$**DEF**.

Remarque : Le symbole « ~ » se lit « est semblable à ».

Les conditions minimales de similitude de triangles

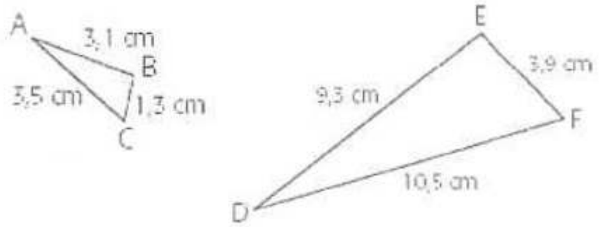
Pour affirmer que deux triangles sont semblables, il suffit de s'assurer que les triangles respectent une des trois conditions minimales suivantes.

1ère La condition minimale de similitude CCC

Deux triangles dont les mesures de côtés homologues sont proportionnels sont nécessairement semblables.

Exemple :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$, car



$$\frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{DE}} = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{EF}} = \frac{m\,\overline{CA}}{m\,\overline{FD}} = \frac{1}{3}$$

ou

$$\frac{m\,\overline{DE}}{m\,\overline{AB}} = \frac{m\,\overline{EF}}{m\,\overline{BC}} = \frac{m\,\overline{FD}}{m\,\overline{CA}} = 3$$

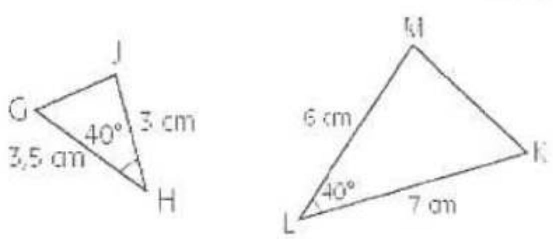
L'inverse multiplicatif du rapport de similitude $\left(\frac{1}{k}\right)$ est aussi un rapport de similitude.

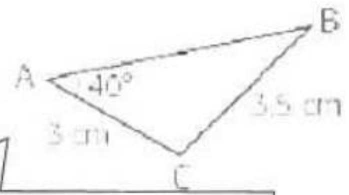
2e La condition minimale de similitude CAC

Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre des côtés homologues dont les mesures sont proportionnelles sont nécessairement semblables.

Exemple :

$\Delta GHJ \sim \Delta KLM$, car $\angle H \cong \angle L$ et $\frac{m\,\overline{KL}}{m\,\overline{GH}} = \frac{m\,\overline{ML}}{m\,JH} = 2$.



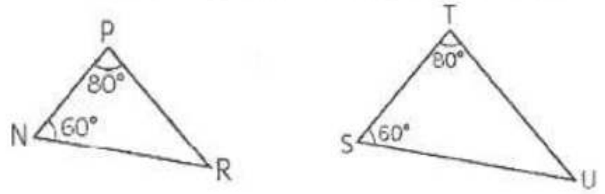


Le triangle **ABC** n'est pas *semblable au triangle* **GHJ**, *car l'angle* de 40° n'est pas compris entre les côtés de 3 cm et de 3.5 cm.

La condition minimale de similitude AA

Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont nécessairement semblables.

Exemple : $\triangle NPR \sim \triangle STU$, car $\angle N \cong \angle S$ et $\angle P \cong \angle T$.

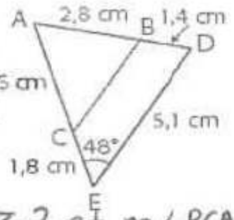


$\overline{BC}$ est homologue à $\overline{DE}$

La recherche de mesures manquantes

$\overline{AC}$ est homologue à $\overline{AE}$
$\overline{AB}$ " " " $\overline{AD}$

hypothèse: $m\overline{DE} = 5{,}1 cm$
$m\overline{AB} = 2{,}8 cm$
$m\overline{BD} = 1{,}4 cm$
$m\overline{AC} = 3{,}6 cm$ 3,6 cm
$m\overline{CE} = 1{,}8 cm$
$m\angle AED = 48°$



Voici comment déterminer la mesure du segment **BC** et la mesure de l'angle **BCA** dans la figure ci-contre.

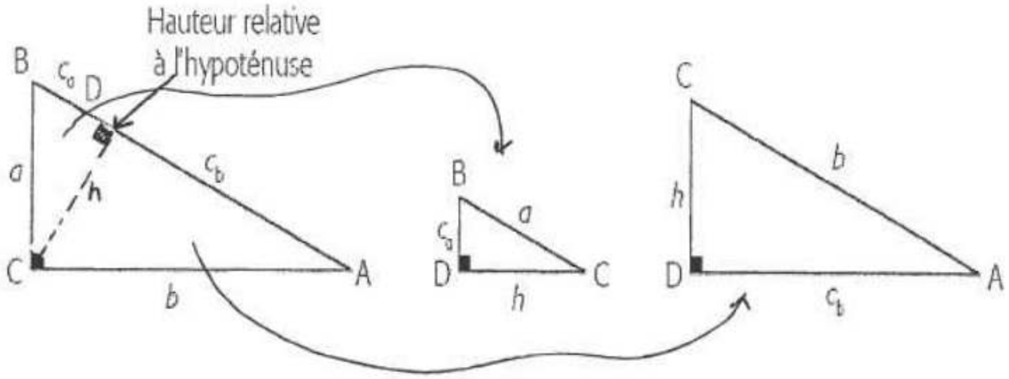
Conclusion: $m\overline{BC} = ?$ et $m\angle BCA = ?$

Étape	Affirmation	Justification
1. Démontrer que les triangles sont semblables en s'assurant qu'une condition minimale de similitude est respectée. C C A DONC:	$\frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}}$ $\frac{5{,}4}{3{,}6} = \frac{4{,}2}{2{,}8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	Les 2 paires de côtés homologues sont proportionnels
	$m\angle CAB = m\angle EAD$	L'angle compris entre les côtés homologues est commun aux deux triangles.
	$\triangle ABC \sim \triangle ADE$	Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre des côtés homologues dont les mesures sont proportionnelles sont nécessairement semblables (condition minimale CAC).
2. Calculer les mesures manquantes à partir de celles des éléments homologues.	$\frac{m\overline{DE}}{m\overline{BC}} = \frac{3}{2}$ $\frac{5{,}1}{m\overline{BC}} = \frac{3}{2}$ $m\overline{BC} = 2 \cdot 5{,}1 \div 3 = 3{,}4 cm$	car 2 Δ semblables ont nécessairement leurs côtés homologues proportionnels.
	$m\angle BCA = m\angle DEA$	Dans des triangles semblables, les angles homologues sont isométriques.

☆ NOTES DE COURS - CHAPITRE 2 → SECTION 3 ☆

Les triangles rectangles semblables déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine 2 autres triangles rectangles, semblables au premier.



Par la condition minimale de similitude AA :

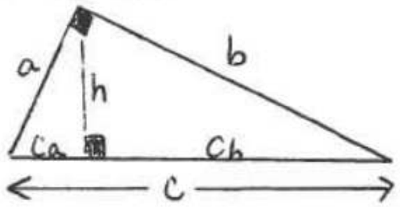
- **ΔABC ~ ΔCBD** puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle **B** en commun ;

  ΔABC ~ ΔACD puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle **A** en commun.

La relation de similitude est transitive, c'est-à-dire que si **ΔABC ~ ΔCBD** et **ΔABC ~ ΔACD**, alors **ΔCBD ~ ΔACD**.

{Résumé section 2.3 :}

Si on a :



alors les relations métriques suivantes sont vraies :

$$ab = ch$$
$$a^2 = c_a \cdot c$$
$$b^2 = c_b \cdot c$$
$$h^2 = c_a \cdot c_b$$
$$(\text{Pythagore} : a^2 + b^2 = c^2)$$

Les relations métriques dans le triangle rectangle

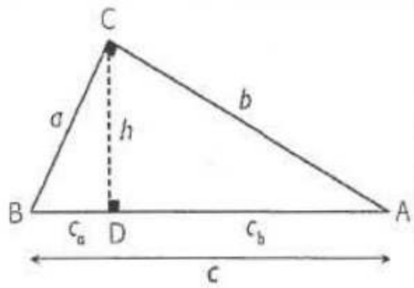
À partir des côtés homologues des triangles semblables déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse, il est possible d'établir plusieurs proportions. Ces proportions permettent d'énoncer plusieurs relations métriques importantes qui facilitent la recherche de mesures manquantes.

Relation métrique 1 :

Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est la moyenne proportionnelle des mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\frac{c_a}{h} = \frac{h}{c_b} \Rightarrow h^2 = c_a \cdot c_b$$

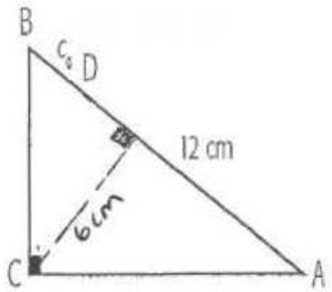
C'est ce qu'on appelle parfois le **théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse.**



Lorsque les deux extrêmes ou les deux moyens d'une proportion ont la même valeur, cette valeur est appelée « moyenne proportionnelle des deux autres valeurs ».

Exemple :

Voici comment déterminer la mesure de $\overline{BD}$ dans le triangle ci-contre à l'aide de cette relation métrique.



choix de formule $h^2 = c_a \cdot c_b$

$6^2 = c_a \cdot 12$

$\frac{36}{12} = \frac{c_a \cdot 12}{12}$

$3 = c_a$

réponse : $m\overline{BD} = 3cm$

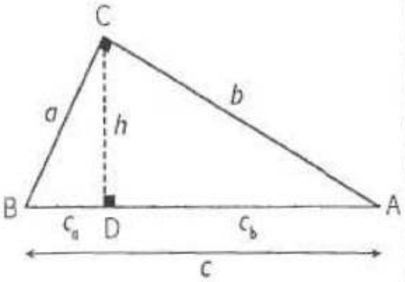
Relation métrique 2 :

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est la moyenne proportionnelle de la mesure de sa projection orthogonale sur l'hypoténuse et de la mesure de l'hypoténuse.

$\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow \mathbf{a^2 = c_a \cdot c}$

$\frac{c_b}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \mathbf{b^2 = c_b \cdot c}$

C'est ce qu'on appelle parfois le **théorème de la cathète.**



Exemple :

Voici comment déterminer la mesure de $\overline{BC}$ dans le triangle ci-dessous à l'aide de cette relation métrique.

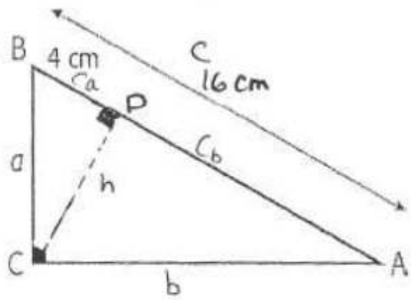
choix de formule

$a^2 = c_a \cdot c$

$a^2 = 4 \cdot 16$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{64}$

$a = 8$



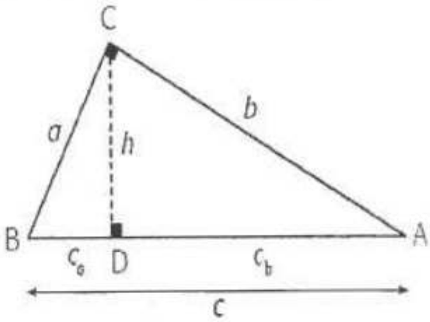
réponse : $m\overline{BC} = 8$ cm.

Relation métrique 3 :

Dans un triangle rectangle, le produit des mesures des cathètes égale le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur relative à l'hypoténuse.

$$a \cdot b = c \cdot h$$

C'est ce qu'on appelle parfois le **théorème du produit des cathètes.**



Exemple :

Voici comment déterminer la mesure de $\overline{CD}$ dans le triangle ci-dessous à l'aide de cette relation métrique.

On peut faire Pythagore

① $c^2 = a^2 + b^2$

$13^2 = a^2 + 12^2$

$169 = a^2 + 144$

$-144 \qquad -144$

$\sqrt{25} = \sqrt{a^2}$

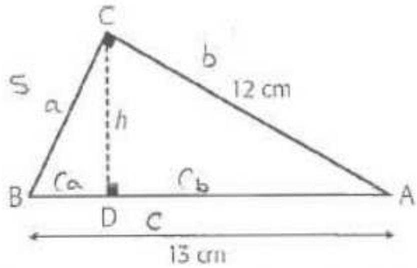
$5 = a$

② $ab = ch$

$5 \cdot 12 = 13 \cdot c$

$\frac{60}{13} = \frac{13c}{13}$

$4,62 \approx c$



Réponse : 4,62 cm $\approx m\overline{CD}$

Exemple : $m\,\overline{XY} = ?$

choix de formule

$a^2 = C_a \cdot C$

$80^2 = 6x \cdot 10x$

$\frac{6400}{40} = \frac{60x^2}{60}$

$\sqrt{106,\overline{6}} = \sqrt{x^2}$

$10,32796 \approx x$

Pythagore

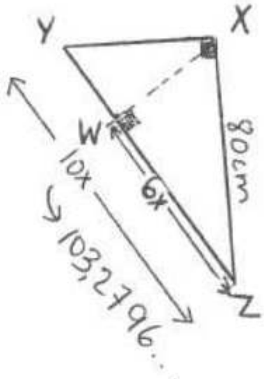
$a^2 + b^2 = c^2$

$80^2 + b^2 = 103,28^2$

$80^2 + b^2 = 10\,666,\overline{6}$

$b^2 = 4266,\overline{6}$

$b \approx 65,32$



réponse $m\,\overline{YX} \approx 65,32$cm