3

SAVOIRS 3.2 La résolution algébrique de systèmes d'équations

3.2.1 LA MÉTHODE DE COMPARAISON

- La méthode de comparaison permet de résoudre algébriquement des systèmes d'équations du premier degré à deux variables qui se ramènent à la forme :

$$y_1 = a_1x + b_1$$
$$y_2 = a_2x + b_2$$

en **comparant** les expressions associées aux variables dépendantes.

- Cette méthode permet de trouver la solution exacte d'un système d'équations.
- Pour valider la solution d'un système d'équations, on remplace, dans chaque équation du système, chacune des variables de la première équation par le couple de coordonnées qui représente la solution. On vérifie ensuite l'exactitude de l'égalité.

Exemple : On veut valider la solution (1, 4) du système d'équations $\begin{array}{l} y = ^-x + 5 \\ y = 3x + 1 \end{array}$.

$y = ^-x + 5$	$y = 3x + 1$
$4 = ^-1 + 5$	$4 = 3 \times 1 + 1$
$4 = 4$	$4 = 3 + 1$
	$4 = 4$
L'égalité est vérifiée.	L'égalité est vérifiée.

Le couple (1, 4) est bien une solution du système d'équations donné.

- Pour résoudre un système d'équations du premier degré à deux variables à l'aide de la méthode de comparaison, tu peux utiliser la démarche suivante.

Démarche	***Exemple :*** **Résous, à l'aide de la méthode de comparaison, le système d'équations suivant.** $\begin{array}{l} \mathbf{y = 4x + 8} \\ \mathbf{y = ^-x - 2} \end{array}$
1. Former une équation avec les deux expressions associées aux variables dépendantes.	On cherche la valeur de x pour laquelle $y_1 = y_2$. $4x + 8 = ^-x - 2$
2. Résoudre l'équation obtenue.	$4x + 8 = ^-x - 2$ $5x = ^-10$ $x = ^-2$
3. Remplacer la **valeur de *x*** obtenue dans une des équations de départ afin de déterminer la valeur correspondante de y.	$y = 4 \times \mathbf{^-2} + 8$ $= 0$ La solution est donc ($^-2$, 0).
4. Valider la solution en substituant les valeurs de x et de y aux variables de chacune des deux équations de départ.	$0 = 4 \times ^-2 + 8$ $0 = ^-(^-2) - 2$ $0 = 0$ $0 = 0$ Puisque ces égalités sont vraies, la solution est valide.

Exemple : Un bateau Ⓐ quitte le port et se déplace à une vitesse de 20 km/h. Il tente de rejoindre un bateau Ⓑ distant de 5 km et qui se déplace à une vitesse de 15 km/h. On cherche combien de temps après son départ le bateau rattrapera le bateau Ⓑ et à quelle distance du port les deux bateaux seront situés.

Le système d'équations est $\begin{array}{l} d_{Ⓐ} = 20t \\ d_{Ⓑ} = 15t + 5 \end{array}$, où d représente la distance (en km) parcourue par chaque bateau et t, le temps (en h) écoulé depuis le départ du bateau Ⓐ.

$d_{Ⓐ} = d_{Ⓑ}$
$20t = 15t + 5$
$5t = 5$
$t = 1$ h

En substituant 1 à t dans l'équation $d_{Ⓐ} = 20t$, on obtient :
$d_{Ⓐ} = 20 \times 1$
$= 20$ km

Validation :
$20 = 20 \times 1$
$20 = 20$
L'égalité est vérifiée.

$20 = 15 \times 1 + 5$
$20 = 15 + 5$
$20 = 20$
L'égalité est vérifiée.

Après 1 h, le bateau Ⓐ rattrapera le bateau Ⓑ. Les deux bateaux seront alors situés à 20 km du port.

3.2.2 LE NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Au cours de la résolution algébrique d'un système d'équations du premier degré à deux variables, on peut déterminer le nombre de solutions possibles du système d'équations :

- en observant le taux de variation a et la valeur initiale b de la forme $y = ax + b$, où $a \neq 0$, des équations du système ;
- en observant la forme réduite de l'équation obtenue.

Nombre de solutions	$\mathbf{y_1 = a_1x + b_1}$ $\mathbf{y_2 = a_2x + b_2}$ **($a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$)**	***Exemples***	
		Système d'équations	**Forme réduite de l'équation obtenue**
Aucune solution	$a_1 = a_2$ $b_1 \neq b_2$ Les taux de variation sont égaux, mais les valeurs initiales sont différentes.	$y = {}^-4x + 3$ $y = {}^-4x + 7$	${}^-4x + 3 = {}^-4x + 7$ $0x = 4$ Aucun nombre réel ne rend cette égalité vraie.
Une solution	$a_1 \neq a_2$ Les taux de variation sont différents.	$y = x - 1$ $y = {}^-3x$	$x - 1 = {}^-3x$ $4x = 1$ $x = \frac{1}{4}$ Seule la valeur $\frac{1}{4}$ rend cette égalité vraie.
Une infinité de solutions	$a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$ Les taux de variation sont égaux et les valeurs initiales sont égales.	$y = 3x + 3$ $y = 3(x + 1)$	$3x + 3 = 3(x + 1)$ $3x + 3 = 3x + 3$ $0x = 0$ Tous les nombres réels rendent cette égalité vraie.

RENFORCEMENT 3.2 La résolution algébrique de systèmes d'équations

1 Résous chacun des systèmes suivants à l'aide de la méthode de comparaison.

a) $y = 3x - 10$
$y = ^{-}x + 6$

b) $y = 5x - 13$
$y = 7x - 3$

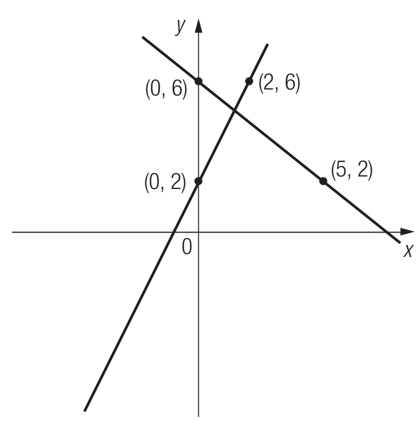
c) $y = 6x - 1$
$y = ^{-}6x + 11$

d) $y = 0{,}5x + 2$
$y = 0{,}75x - 3$

e) $y = 0{,}1x + 0{,}6$
$y = ^{-}5{,}2x - 7$

f) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$
$y = ^{-}\frac{3}{5}x - \frac{1}{3}$

2 Détermine la solution exacte du système d'équations illustré ci-contre.



3 Pour chacune des situations suivantes :

1) identifie les inconnues et représente-les par des variables différentes ;
2) écris le système d'équations approprié ;
3) détermine la solution à l'aide de la méthode de comparaison ;
4) réponds à la question par une phrase complète.

a) Un disque dur Ⓐ contient initialement 30 Go de données. Il se remplit au rythme de 4 Go/jour. Un disque dur Ⓑ contient initialement 75 Go de données. Il se remplit au rythme de 1,75 Go/jour. Après combien de temps les deux disques durs contiendront-ils la même quantité de données et quelle est cette quantité de données ?

1) ______________________ 2) ______________________

______________________ ______________________

3)

____

4) ____

____

b) Un avion Ⓐ vole à une altitude de 1200 m et perd de l'altitude au rythme de 3,42 m/s. Au même moment, un avion Ⓑ vole à une altitude de 300 m et gagne de l'altitude au rythme de 4,21 m/s. Après combien de temps les deux avions voleront-ils à la même altitude et quelle sera cette altitude ?

1) ______________________ 2) ______________________

______________________ ______________________

3)

____

4) ____

____

ENRICHISSEMENT 3.2 La résolution algébrique de systèmes d’équations

1 Les tables de valeurs ci-dessous montrent l’évolution de l’espérance de vie dans 2 pays.

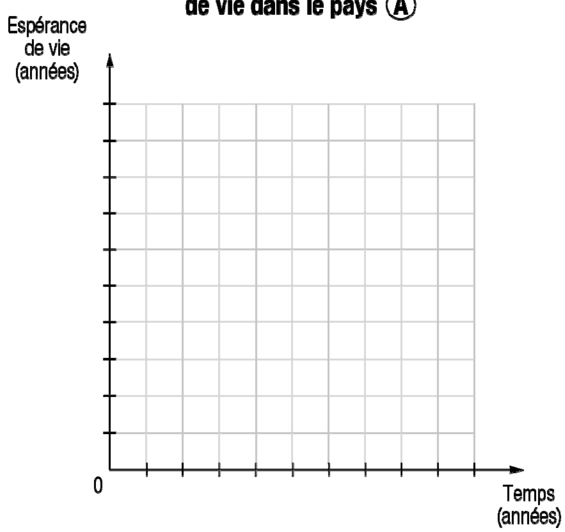
Évolution de l’espérance de vie

Pays (A)	
Année	Espérance de vie (années)
1990	55,2
1991	55,4
1992	55,7
1993	56,3
1994	56,4
1995	56,6
1996	56,7
1997	57
1998	57,3
1999	57,3

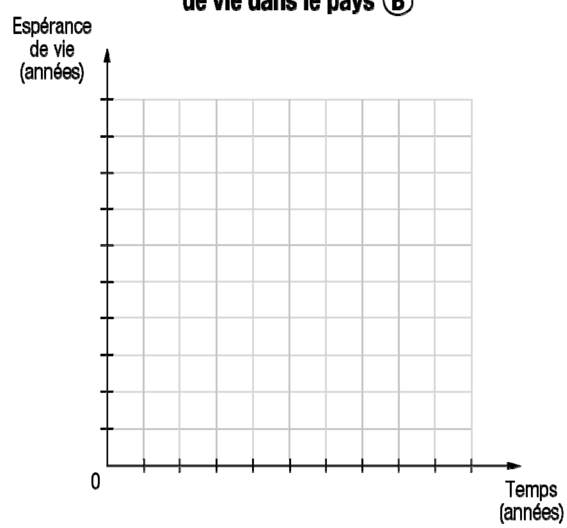
Pays (B)	
Année	Espérance de vie (années)
1990	52,4
1991	52,8
1992	53,1
1993	53,2
1994	53,7
1995	54,1
1996	54,2
1997	54,8
1998	54,9
1999	55,5

Estime en quelle année l’espérance de vie sera la même dans ces 2 pays, ainsi que cette espérance de vie.

Évolution de l’espérance de vie dans le pays (A)



Évolution de l’espérance de vie dans le pays (B)



Réponse : ______________________________

