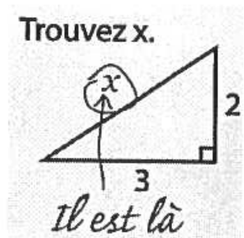
CHAPITRE 4

LES GRAPHES



J' ♥ lesmaths.fr

NOTES DE COURS

NOM : CORRIGÉ

GROUPE : ______

CHAPITRE 4

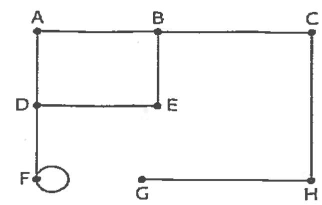
SECTION 1

Un graphe est une représentation mathématique comprenant un ensemble de points appelés « sommets » et un ensemble de liens appelés « arêtes » reliant ces sommets.

Exemple:

Dans le graphe ci-contre, les sommets représentent les arrêts d'autobus d'un service de transport en commun et les arêtes, différents tronçons des trajets d'autobus. On considère que les trajets se font dans les deux directions.

Les trajets d'autobus entre différents arrêts



Description en contexte	Traduction en langage mathématique	Définition mathématique
1. Il y a 8 arrêts d'autobus et 9 tronçons différents.	Le graphe comporte 8 sommets et 9 arêtes.	**Sommet:** point appartenant à un graphe. **Arête:** ligne qui joint deux sommets, distincts ou non, d'un graphe.
2. Il est possible de voyager de l'arrêt E à l'arrêt G.	La chaîne E-B-C-H-G existe dans ce graphe.	**Chaîne:** suite d'arêtes consécutives.
3. Il y a un trajet qui permet de monter et de descendre à l'arrêt D en passant par les arrêts A, B et E.	Le cycle D-A-B-E-D existe dans ce graphe.	**Cycle:** chaîne qui commence et qui se termine au même sommet.
4. Le plus court trajet allant de l'arrêt E à l'arrêt G comporte 4 tronçons.	La chaîne E-B-C-H-G a une longueur de 4.	**Longueur d'une chaîne ou d'un cycle:** nombre d'arêtes constituant la chaîne ou le cycle.
5. À partir de l'arrêt F, l'autobus peut effectuer une boucle avant de poursuivre son trajet.	Une boucle est associée au sommet F.	**Boucle:** arête qui débute et se termine au même sommet.
6. L'autobus peut arriver à l'arrêt G d'une seule direction et aux arrêts B, D et F de trois directions différentes.	Le degré du sommet G est 1. Le degré des sommets B, D et F est 3.	**Degré d'un sommet:** nombre d'arêtes qui touchent le sommet. *Remarque:* Une boucle compte pour deux degrés puisque ses deux extrémités touchent au sommet.
7. La façon la plus rapide de passer de l'arrêt A à l'arrêt F est de passer par D. Dans ce cas, l'autobus n'emprunte que deux tronçons de trajet.	La distance entre A et F est 2.	**Distance entre deux sommets:** longueur de la plus courte chaîne qui relie deux sommets.

Certaines observations s'appliquent à tous les types de graphes.

1. Dans un graphe, contrairement au plan, la forme de l'arête n'a pas de signification précise. Dans l'exemple de la page précédente, le trajet entre les arrêts A et B n'est pas nécessairement rectiligne ni perpendiculaire au trajet entre les arrêts B et E.

2. Dans un graphe, $S = 2a$, où S est la somme des degrés des sommets et a, le nombre d'arêtes de ce graphe. Dans l'exemple de la page précédente, la somme des degrés des sommets est de 18, soit le double de 9, le nombre d'arêtes.

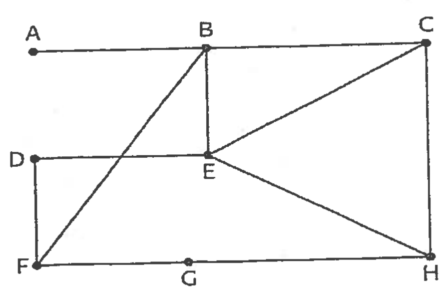
3. Dans un graphe, une chaîne simple est une chaîne qui ne passe pas deux fois par la même arête. De la même façon, aucune arête n'est répétée dans un cycle simple.

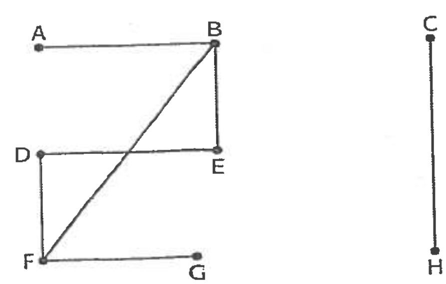
Les types de graphes

Le graphe connexe

Un graphe est dit connexe lorsque chaque paire de sommets peut être reliée par une suite d'arêtes.

Exemples:





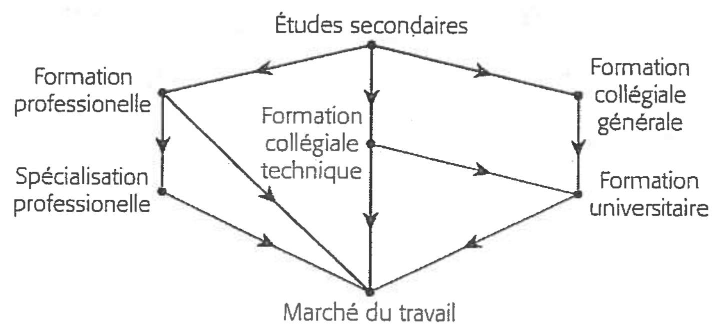
Le graphe de gauche est connexe puisque tous les sommets peuvent être reliés par une suite d'arêtes. Le graphe de droite n'est pas connexe puisque les sommets C et H sont isolés des autres sommets.

Le graphe orienté

Dans un graphe orienté, chacune des arêtes reliant deux sommets est orientée. De plus, les arêtes sont appelées «arcs». Aussi, les chaînes et les cycles sont-ils respectivement appelés «chemins» et «circuits».

Exemple: Dans le graphe qui suit, les sommets représentent différentes formations scolaires et les arcs représentent l'accès aux programmes d'étude d'autres établissements qui s'offrent aux personnes ayant complété cette formation.

Les programmes de formation postsecondaire

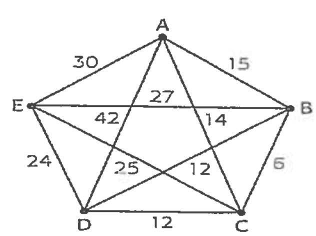


Le graphe valué

Un graphe valué est un graphe dans lequel on a associé une valeur numérique à chacune des arêtes.

Exemple: Dans ce graphe valué, les sommets représentent différentes succursales d'une chaîne de magasins. La distance en kilomètres entre celles-ci est indiquée sur les arêtes du graphe.

La distance entre les succursales d'une chaîne



La valeur attribuée à chaque arête se nomme le

« poids de l'arête ».

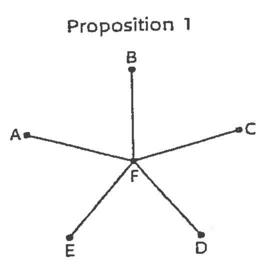
Dans un graphe valué, le poids (ou la valeur) d'une chaîne ou d'un cycle est la somme du poids (ou de la valeur) des arêtes composant cette chaîne ou ce cycle.

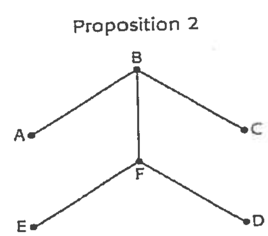
Dans le graphe ci-dessus, le poids du cycle A – B – E – D – A est de $15+27+24+42=108$. Cela signifie que, par exemple, une représentante qui visite ces succursales dans cet ordre parcourra 108 km.

L'arbre

Un arbre est un graphe connexe non Orienté qui ne comporte aucun cycle. On peut donc affirmer qu'il contient le minimum d'arêtes nécessaire pour que le graphe soit connexe.

Exemple: Les graphes ci-dessous représentent deux façons de relier six édifices par des souterrains en minimisant le nombre de souterrains.





Un arbre comporte toujours Une arête de moins que le nombre de sommets.

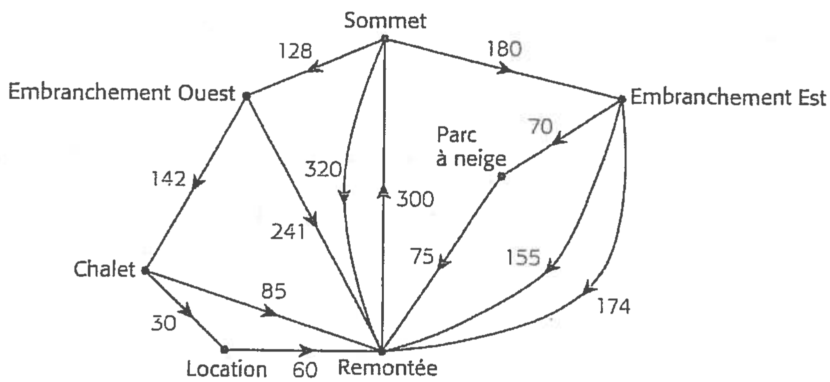
Dans les graphes ci-dessus, on a 5 arêtes et 6 sommets.

Le choix du type de graphes

Le type de graphe choisi pour illustrer la relation entre différents éléments d'une situation dépend du contexte. Il est à noter qu'un graphe peut correspondre à plus d'un type à la fois.

Exemple: Le graphe ci-dessous représente les points d'intérêt d'une station de ski alpin. Il est à la fois orienté et valué. Le poids des arêtes représente la distance, en mètres, qui sépare deux lieux.

Les distances entre les différents points d'intérêt d'une station de ski



Exemple :

À partir du graphe ci-dessus, réponds aux questions suivantes.

A) Quel est le nombre de degrés du sommet «Sommet» ? 4

B) Quel est le poids de la chaîne C-R-S-EE ? 565

C) Quelle est la distance entre EE et EO ? 2

D) Nomme deux cycles différents possibles dans ce graphe.

C - R - S - EO - C

S - EE - P - R - S

E) Quelle est la longueur de la chaîne C-R-S-EE ?

3

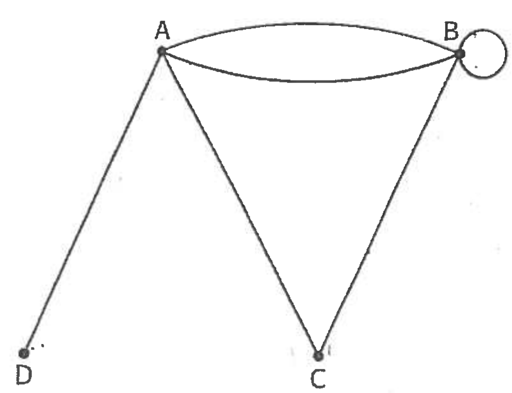
Section 2
La chaîne et le cycle eulériens

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne passant une seule fois par chacune des arêtes d'un graphe. Les graphes qui comportent de telles chaînes sont connexes et n'ont aucun ou exactement 2 sommets de degré impair. Dans le cas où un graphe a deux sommets de degré impair, la chaîne commence et se termine alors nécessairement à ces deux sommets.

Un **cycle eulérien** est un cycle passant par chacune des arêtes d'un graphe. Les graphes qui comportent de tels cycles sont connexes et ont des tous les sommets de degré pair.

Exemple:

Le graphe ci-dessous a exactement deux sommets de degré impair: les sommets B et D. Cette information suffit pour savoir qu'il est possible de trouver au moins une chaîne eulérienne dans ce graphe.



Voici deux chaînes eulériennes trouvées dans ce graphe.

B-B-C-A-B-A-D et D-A-B-B-A-C-B

Ce graphe ne contient aucun cycle eulérien puisque certains de ses sommets sont de degré impair.

La chaîne et le cycle hamiltoniens

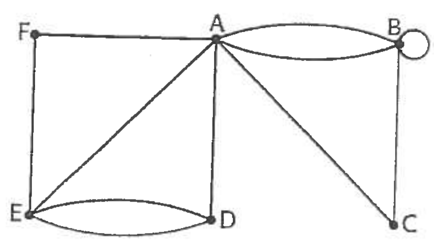
Une **chaîne hamiltonienne** est une chaîne passant une seule fois par chacun des sommets d'un graphe. Les graphes qui comportent de telles chaînes sont connexes

Cependant, ce n'est pas parce qu'un graphe est connexe qu'il contient nécessairement une chaîne hamiltonienne.

Un **cycle hamiltonien** est un cycle passant une seule fois par chacun des sommets d'un graphe.

Exemple:

Dans le graphe ci-dessous, la chaîne C - B - A - D - E - F est hamiltonienne puisqu'elle passe une seule fois par chacun des sommets.



Ce graphe ne contient aucun cycle hamiltonien, car il est impossible de passer par chacun des sommets sans repasser plusieurs fois par le sommet A.

Remarque: Pour déterminer si un graphe contient une chaîne ou un cycle hamiltoniens, il faut procéder par essais.

La coloration des sommets d'un graphe et son nombre chromatique

La **coloration** des sommets d'un graphe consiste à attribuer à chacun des sommets du graphe une couleur de telle sorte que les sommets adjacents soient des couleurs différentes.

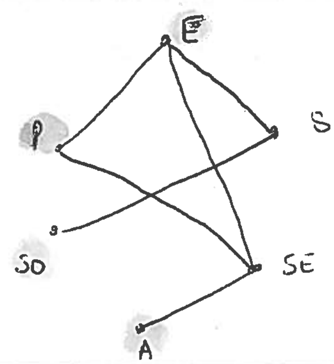
Le **nombre chromatique** est le plus petit nombre de couleurs qu'il est possible d'utiliser pour colorer les sommets d'un graphe. Le nombre chromatique d'un graphe est toujours inférieur ou égal à $s+1$, où *s* représente le plus grand degré des sommets du graphe.

Exemple: Le directeur d'une école souhaite offrir à ses employés une formation qui leur permettra d'utiliser correctement un nouveau logiciel. L'horaire des ateliers de formation sera déterminé en fonction des disponibilités des différents employés. Voici les incompatibilités d'horaires des employés de cette école.

- Les enseignants (E) ont un horaire incompatible avec celui des surveillants (S).
- Les secrétaires (SE) ne peuvent assister au même atelier que les directeurs adjoints (A) et que les enseignants (E).
- Les employés de soutien (SO) ont un horaire incompatible avec celui des surveillants (S).
- Les préposés à l'entretien (P) ne peuvent pas assister au même atelier que les enseignants (E) et que les secrétaires (SE).

Quel est le nombre minimal d'ateliers à prévoir?

La coloration des sommets d'un graphe et son nombre chromatique

Étape	Démarche
1. Au besoin, représenter la situation à l'aide d'un graphe dans lequel les arêtes représentent les incompatibilités.	
2. Énumérer tous les sommets du graphe et les placer en ordre décroissant de degré. *Remarque:* L'ordre n'a pas d'importance pour deux sommets de même degré.	E (3) SE (3) P (2) S (2) SO (1) A (1)
3. Attribuer une couleur au sommet de plus grand degré. Attribuer cette même couleur à tous les sommets placés en ordre décroissant de degré qui ne sont pas reliés au sommet de plus grand degré ou reliés entre eux.	E (rouge) So (rouge) A (rouge) SE (bleu) S (bleu) P (vert)
4. Répéter l'étape **3** avec de nouvelles couleurs jusqu'à ce que tous les sommets soient colorés.	
5. Trouver le nombre chromatique du graphe et répondre à la question.	Le nombre chromatique du graphe est 3 car il faut minimalement 3 couleurs, donc 3 ateliers pour former les employés de cette école.

Section 3 : L'arbre de valeurs minimales ou maximales

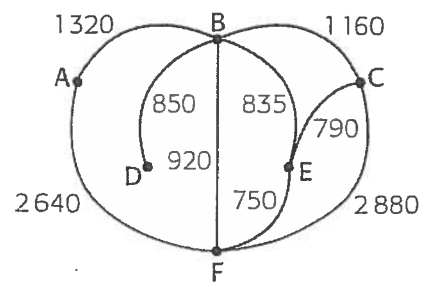
L'arbre de valeurs minimales ou maximales relie tous les sommets d'un graphe par une sélection d'arêtes de façon que le poids de l'arbre soit, respectivement, le plus petit ou le plus grand possible. Un arbre de valeurs minimales ou maximales permet de minimiser ou de maximiser un coût, une distance, etc. L'algorithme de Kruskal sert à déterminer ce type d'arbre.

Exemple:

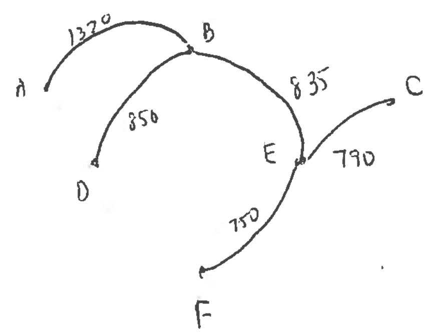
Le graphe ci-contre représente des immeubles qu'il faut relier par des trottoirs. Le coût estimé pour la construction des trottoirs est représenté par le poids des arêtes du graphe. L'objectif est de minimiser le coût total de la construction de ces trottoirs en s'assurant que tous les immeubles soient reliés.

Voici les étapes de l'algorithme de Kruskal qui permettent de déterminer l'arbre de valeurs minimales de cette situation.

Le coût estimé
de la construction des trottoirs



L'arbre de valeurs minimales

Étape	Démarche
1. Énumérer toutes les arêtes du graphe et les placer en ordre croissant de poids.	EF (750) - CE (790) - BE (835) - BD (850) - BF (920) BC (1160) - AB (1320) - AF (2640) - CF (2880)
2. Sélectionner l'arête de plus petit poids qui ne forme pas un cycle avec les arêtes déjà sélectionnées jusqu'à ce que tous les sommets du graphe soient reliés.	

3. S'il y a lieu, calculer le poids de l'arbre obtenu et interpréter la réponse selon la situation.	750 + 790 + 835 + 850 + 1320 = 4545 La construction des trottoirs reliant tous les immeubles coûtera donc 4545 $

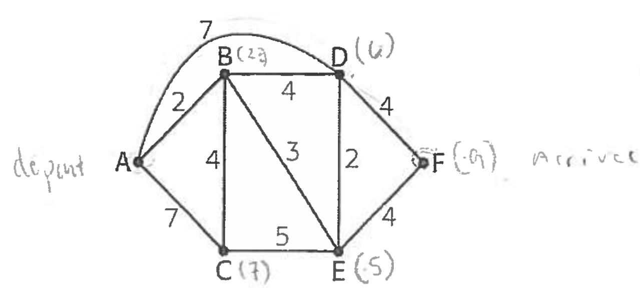
Remarque: Pour déterminer l'arbre de valeurs maximales, il faut suivre les mêmes étapes de l'algorithme de Kruskal, mais il faut sélectionner, à l'étape **2**, les arêtes de poids maximal plutôt que les arêtes de poids minimal.

La chaîne la plus courte

Dans un graphe valué, la chaîne la plus courte entre deux sommets (ou chaîne de valeurs minimales) parmi les chaînes qui les relient est celle ayant le plus petit poids. L'algorithme de Dijkstra peut servir à trouver cette chaîne.

Exemple:

Soit le graphe suivant. Les sommets représentent des lieux et les arêtes, des chemins reliant ces lieux. pour aller du sommet A à F



La chaîne la plus courte

Étape	Démarche
1. Trouver la chaîne la plus courte qui relie le sommet de départ à chacun des sommets qui lui sont adjacents. Ensuite, inscrire le sommet de provenance et le poids de la chaîne entre parenthèses pour chaque sommet évalué.	$A \overset{2}{-} B \overset{4}{-} C$ Pour se rendre du sommet A au sommet C il est plus court de passer par B que de se rendre directem à C
2. Répéter l'étape **1** pour chaque sommet adjacent à ceux évalués précédemment jusqu'au dernier sommet.	
3. Trouver la chaîne la plus courte du graphe en identifiant ses sommets à rebours à partir du dernier sommet évalué.	A - B - E - F Poids : 9

Remarque: Pour les graphes qui contiennent peu de chaînes, il est plus rapide de procéder par essais que d'utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Le chemin critique

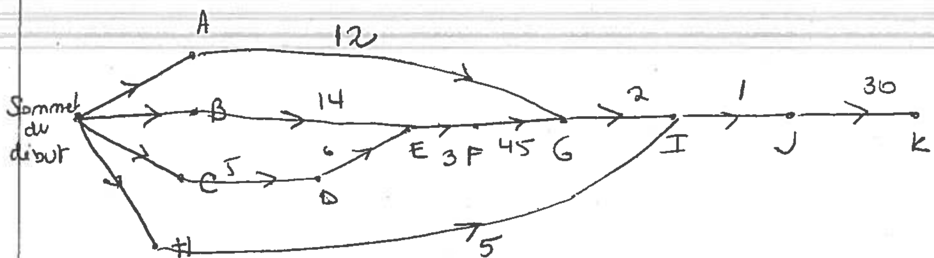
Le chemin critique d'un graphe valué et orienté correspond au chemin qui a le plus grand poids. Le chemin critique sert à déterminer le temps minimal nécessaire pour accomplir une tâche. Les sommets du chemin critique représentent les étapes dont la durée influe directement sur le temps nécessaire pour accomplir la tâche.

Exemple: *Le tableau suivant présente les étapes à suivre pour faire une recette de spaghettis.*

La recette de spaghettis

Étape	Durée (min)	Étape(s) préalable(s)
A Cuire les spaghettis.	12	—
B Cuire la viande.	14	—
C Couper les légumes.	5	—
D Faire revenir les légumes.	6	**C**
E Préparer la sauce.	3	**B** et **D**
F Laisser mijoter la sauce.	45	**E**
G Mélanger les spaghettis et la sauce, et déposer dans un plat de service.	2	**A** et **F**
H Râper le fromage.	5	—
I Parsemer les spaghettis de fromage râpé.	1	**G** et **H**
J Cuire les spaghettis au four.	30	**I**
K Servir les spaghettis.	—	**J**

Le chemin critique

Étape	Démarche
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe valué et orienté en tenant compte des étapes préalables.	
2. Déterminer le poids de chacun des chemins qui relient les sommets du début (SD) et de la fin de la tâche (K).	
3. Le chemin critique de ce graphe correspond au chemin qui a le plus grand poids. S'il y a lieu, interpréter la réponse selon la situation.	Chemin critique : SD - B - E - F - G - I - J - K Poids : 95 Conclusion : Il faut donc au minimum 95 min pour faire la recette des spaghettis. Pour réduire ce temps, il faudrait consacrer moins de temps à l'une des étapes formant ce chemin critique, soit B, E, F, G, I, J.