Nom : V. Savard

# Notes de cours - CHAPITRE 4 :
## LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

### ✓ Rappels

- Équations du premier degré à une variable: Équation avec une seule variable ayant 1 comme exposant.
- Résoudre une équation : Isoler la variable, c'est-à-dire trouver la valeur de la variable qui fait en sorte que l'équation soit vraie.

Attention aux opérations inverses:

- La première étape est toujours d'éliminer les parenthèses et de regrouper les termes semblables qui se trouvent du même côté du égal.
- Pour annuler une multiplication, il faut faire une division et vice-versa
- Pour annuler une soustraction, il faut additionner et vice-versa.
- Toutes opérations inverses doivent être faites des deux côtés de l'égalité.
- Par convention, les termes constants sont à droite de l'égalité.

*Exemple 1:* Résous l'équation suivante : $4(y-1)\boxed{-2}(11-2y) = 3(y+1)+1$

$$4y-4-22+4y = 3y+3+1$$
$$8y-26 = 3y+4$$
$$-3y \qquad -3y$$
$$5y-26 = 4$$
$$+26 \qquad +26$$
$$\frac{5y}{5} = \frac{30}{5}$$
$$y = 6$$

validation

$4(y-1)-2(11-2y)=3(y+1)+1$

$4(6-1)-2(11-2\cdot6)=3(6+1)+1$

$22=22$ :)

*Exemple 2 :* Trouve la solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{3}(9x-21) + 4 - \frac{3x}{5} = \frac{2}{5}(x+10) + 1$$
$$5\cdot\left(3x-7+4-\frac{3x}{5}\right) = \left(\frac{2x}{5}+4+1\right)\cdot5$$
$$15x-35+20-3x = 2x+20+5$$
$$12x-15 = 2x+25$$
$$-2x \qquad -2x$$
$$10x-15 = 25$$
$$+15 \qquad +15$$
$$10x = 40$$
$$\frac{10x}{10} = \frac{40}{10}$$
$$x=4$$

Validation

$\frac{1}{3}(9x-21)+4-\frac{3x}{5}=\frac{2}{5}(x+10)+1$

$\frac{1}{3}(9\cdot4-21)+4-\frac{3\cdot4}{5}=\frac{2}{5}(4+10)+1$

$6,6=6,6$ :)

**Avec un contexte :**

1- Identifier la ou les inconnues à l'aide d'une variable;
(s'il y a plus d'une inconnue, c'est celle pour laquelle on a le moins d'informations qu'on identifie par la variable. On exprime les autres inconnues en fonction de cette variable.);
2- Poser une égalité (une équation) à partir des informations fournies dans le problème.
3- Résoudre l'équation;
4- Vérifier la solution;
5- Répondre à la question.

*Exemple 1 :* La base d'un rectangle mesure 4 cm de plus que sa hauteur. Si le périmètre de ce rectangle mesure 52 cm, quelles sont les dimensions de ce rectangle?

1- inconnues

x : hauteur (cm)
x+4 : base (cm)

2- Equation et résoudre

$\underbrace{x+(x+4)+x+(x+4)}=52$

$4x+8=52$
$-8 \quad -8$

$\frac{4x}{4}=\frac{44}{4}$

$x=11$ cm

3- 2e inconnue

$x+4=11+4=15$ cm (base)

4- Validation

$x+(x+4)+x+(x+4)=52$
$11+15+11+15=52$
$52=52$ :)

5- Réponse

les dimensions du rectangles sont 11cm par 15cm.

*Exemple 2 :* La somme de deux nombre est 29. Le deuxième nombre est 4 de moins que le double du premier nombre. Quels sont ces deux nombres?

1- inconnues

1er nb : x
2e nb : 2x-4.

2- Equation et résoudre

$\underbrace{x+(2x}-4)=29.$

$3x-4=29$
$+4 \quad +4$

$\frac{3x}{3}=\frac{33}{3}$

$x=11$

3- 2e inconnue

$2x-4$
$2(11)-4$
$22-4=18$

4- Validation

$x+(2x-4)=29.$
$11+18=29$
$29=29$ :)

5- Réponse

les deux nombres sont 11 et 18.

**<u>Devoirs du lundi 25 et mercredi 27 novembre</u>: Document d'exercices p.1 à 3**

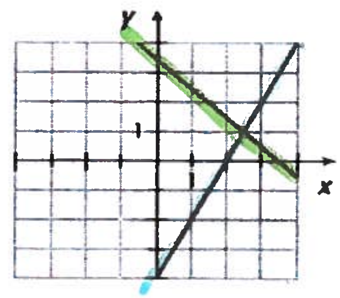
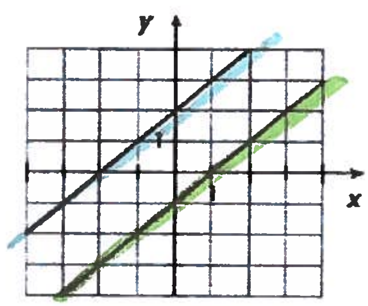
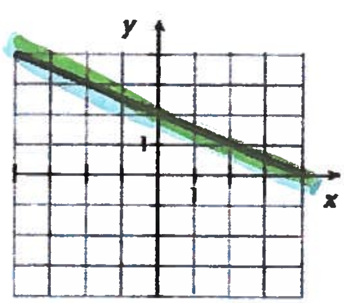
## ✓ Définition d'un système d'équations :

Un système d'équations est un ensemble d'équations (deux équations pour nous) utilisant les mêmes variables ou inconnues ;

## ✓ Solution d'un système d'équations :

Une solution est l'affectation d'une valeur à chacune de ces variables, de telle façon que toutes les équations du système soient satisfaites simultanément.

## ✓ Nombre de solutions

| | Représentation graphique | Système d'équations |
|---|---|---|
| Solution unique<br>$\boxed{a_1 \neq a_2}$ | <br>Droites sécantes | $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -x + \frac{7}{2} \end{cases}$<br>a: $2 \neq -1$<br>donc 1 sln |
| Aucune solution<br>$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a_2 \\ \text{et} \\ b_1 \neq b_2 \end{matrix}}$ | <br>Droites parallèles distinctes | $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$<br>$\left.\begin{matrix} a: 1 = 1 \\ b: 2 \neq -1 \end{matrix}\right\}$ donc aucune sln |
| Infinité de solutions<br>$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a_2 \\ \text{et} \\ b_1 = b_2 \end{matrix}}$ | <br>Droites parallèles confondues | $\begin{cases} y = \frac{-x}{2} + 2 \\ 2y = -x + 4 \end{cases}$<br>$\frac{2y}{2} = \frac{-x+4}{2}$<br>$y = \frac{-x}{2} + 2$ |

$\left.\begin{matrix} a: -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ b: 2 = 2 \end{matrix}\right\}$ donc infinité de sln

Mise en pratique

Sans le représenter graphiquement, détermine si chaque système d'équations a une solution unique, s'il n'a aucune solution ou s'il a une infinité de solutions.

a) $\begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ 9x - 3y - 21 = 0 \end{cases}$

① $3x - y - 7 = 0$
$+y \quad +y$
① $3x - 7 = y$
② $9x - 3y - 21 = 0$
$+3y \quad +3y$
$\frac{9x - 21}{3} = \frac{3y}{3}$
② $3x - 7 = y$

a: $3 = 3$
b: $-7 = -7$
$a_1 = a_2$
$b_1 = b_2$
donc infinité de sln

b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$

a: $1 = 1$
b: $2 \neq 4$

alors aucune solution

c) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = \frac{-1}{3}x - 9 \end{cases}$

a: $2 \neq \frac{-1}{3}$

donc une solution.

## ✓ Résoudre un système d'équations

- Résoudre un système d'équations consiste à déterminer les valeurs des deux variables qui vérifient simultanément les deux équations.

## ✓ Résoudre à l'aide de la table des valeurs

- Pour résoudre à l'aide d'une table de valeurs, il faut trouver le x où les y sont égaux.

- Inconvénient : très long

*Exemple* Trouver la solution du système d'équations à l'aide de tables de valeurs.

$$\begin{cases} y_1 = 3x + 4 \\ y_2 = 0,5x - 3 \end{cases}$$

| x | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | -8 | -2 | 4 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| $y_2$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |

| x | -3.5 | -3 | -2.5 |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | -6.5 | -5 | -3.5 |
| $y_2$ | -4.75 | -4.5 | -4.25 |

| x | -3 | -2.9 | -2.8 | -2.7 | -2.6 | -2.5 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | -5 | -4.7 | -4.4 | -4.1 | -3.8 | -3.5 | | | | |
| $y_2$ | -4.5 | -4.45 | -4.4 | -4.35 | -4.3 | -4.25 | | | | |

**Solution :** (-2.8, -4.4)

## ✓ Résoudre un système d'équations graphiquement

- Pour résoudre à l'aide d'un graphique, il faut trouver quelles sont les coordonnées du point de rencontre des deux droites.

- Inconvénient : imprécis

- Pour cela, il faut :

  **1-** Modéliser la situation;

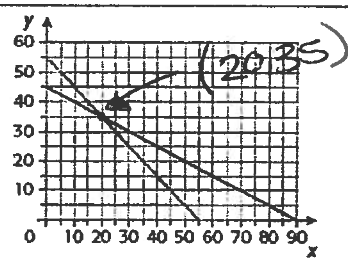
  **2-** Représenter chaque équation dans un plan cartésien à l'aide de tables des valeurs;

  **3-** Déterminer les coordonnées du point d'intersection;

  **4-** Valider les valeurs trouvées dans les équations de départ;

  **5-** Interpréter la situation si dans un contexte.

*Exemple :* Une tirelire, remplie de pièces de 1 \$ et de 2 \$, contient 90 \$. Il y a en tout 55 pièces de monnaie. Combien de pièces de 1 \$ et de pièces de 2 \$ y a-t-il dans la tirelire ?

<table>
<tr><th>Étape</th><th>Démarche</th></tr>
<tr><td>1. Définir les variables et modéliser la situation à l'aide d'un système d'équations.</td><td>$x$ : nombre de pièces de 1 $<br>$y$ : nombre de pièces de 2 $<br>$\begin{cases} x+2y=90 \\ x+y=55 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>2. Représenter graphiquement les équations et déterminer les coordonnées du point de rencontre des droites.</td><td>

Les coordonnées du point de rencontre sont (20, 35).<br>
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>45</td></tr><tr><td>10</td><td>40</td></tr><tr><td>20</td><td>35</td></tr></table>
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>55</td></tr><tr><td>10</td><td>45</td></tr><tr><td>20</td><td>35</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3. Valider la solution dans les deux équations et ensuite dans le contexte.</td><td>$\begin{cases} x+2y=90 \\ x+y=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20+2(35)=90 \\ 20+35=55 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>4. Retourner au contexte et répondre à la question.</td><td>La tirelire contient 20 pièces de 1 $ et 35 pièces de 2 $.</td></tr>
</table>

**<u>Devoir du vendredi 29 novembre</u> : manuel p. 183 (ai-je bien compris?) #1, 2b + p.185 (ai-je bien compris?) + p.188 #4 + p.189 #5h**

## ✓ Interpréter des problèmes afin de les résoudre algébriquement

**1-** Identifier les variables;
**2-** Bâtir deux équations contenant les deux variables;
**3-** Répondre algébriquement en choisissant la meilleure méthode;
**4-** Valider la solution;
**5-** Répondre à la question.

juste étape 1 et 2

*Exemples* : Interprète les situations suivantes (modélise les situations par un système d'équations du premier degré).

*1-* Deux plombiers demandent des tarifs différents pour leur travail. Le premier demande à ses clients 45 $ de l'heure. Le deuxième demande 40 $ en frais de déplacement et 35 $ de l'heure pour son travail.

1- variables
x : temps (h)
y : Salaire ($)

2- Éqns
#1 : $y = 45x$
#2 : $y = 35x + 40$.

*2-* Lorsque j'additionne deux nombres, j'obtiens 690. Lorsque je soustrais le deuxième nombre au double du premier, j'obtiens 3. Modélise cette situation par un système d'équations.

1- Variables
x : 1er nb
y : 2e nb

2- Éqns
#1 : $x + y = 690$
#2 : $2x - y = 3$

✓ **La résolution avec la méthode «PAR COMPARAISON» ($y_1 = y_2$)**

a) Résous le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 6x - 4 & (1) \\ y - 8 = \frac{2}{7}x & (2) \end{cases}$$

1- Rendre sous la forme $y=ax+b$

(1) ok

(2) $y-8=\frac{2}{7}x$

$+8 \qquad +8$

$y=\frac{2}{7}x+8$

2- Mettre les 2 équations égales et isoler le x.

$y_1=y_2$

$7\cdot(6x-4)=\left(\frac{2}{7}x+8\right)\cdot 7$

*Eliminer les fractions rendu ici *

$42x-28=2x+56$

$-2x \qquad -2x$

$40x-28=56$

$+28 \qquad +28$

$\frac{40x}{40}=\frac{84}{40}$

$x=2{,}1$

3- trouver la valeur de y en remplaçant x dans une équation de départ

$y=6x-4$

$y=6(2{,}1)-4$

$y=12{,}6-4$

$y=8{,}6$

4- Valider le pt solution en remplaçant x et y dans l'autre équation de départ.

$y-8=\frac{2}{7}x$

$8{,}6-8=\frac{2}{7}(2{,}1)$

$0{,}6=0{,}6$ ☺

5- Répondre en pt (x,y) s'il n'y a pas de contexte ou en phrase s'il y a un contexte.

$(2{,}1 ; 8{,}6)$

b) Les tables de valeurs ci-dessous indiquent la taille de deux plants de tomates en fonction du nombre de jours écoulés depuis leur transplantation. À quel moment la taille des deux plants était-elle la même ?

1- variables

x: temps (jour)

y: taille (cm)

| Plant de tomates A | |
|---|---|
| **Nombre de jours** | **Taille (cm)** |
| 0 | 11 |
| 8 | 15 |
| 15 | 18,5 |
| 20 | 21 |

| Plant de tomates B | |
|---|---|
| **Nombre de jours** | **Taille (cm)** |
| 4 | 17,2 |
| 10 | 19 |
| 18 | 21,4 |
| 20 | 22 |

2- RÈGLES (Éqns)

A (0,11) et (8,15)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15-11}{8-0} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

b: dans la table (0,11)

$\Rightarrow y = 0{,}5x + 11$

B (4;17,2)(10,19)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19-17{,}2}{10-4} = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3$

b: $y = 0{,}3x + b$

$17{,}2 = 0{,}3(4) + b$

$17{,}2 = 1{,}2 + b$

$-1{,}2 \quad -1{,}2$

$16 = b$

validation

$y = 0{,}3x + 16$

$19 = 0{,}3(10) + 16$

$19 = 3 + 16$

$19 = 19$ ☺

$\Rightarrow y = 0{,}3x + 16$

3- Résoudre

$y = y$

$0{,}5x + 11 = 0{,}3x + 16$

$-11 \quad -11$

$0{,}5x = 0{,}3x + 5$

$-0{,}3x \quad -0{,}3x$

$\frac{0{,}2x}{0{,}2} = \frac{5}{0{,}2}$

$x = 25$ jours

4- trouver y

$y = 0{,}5x + 11$

$y = 0{,}5(25) + 11$

$y = 12{,}5 + 11$

$y = 23{,}5$ cm

5- valider

$y = 0{,}3x + 16$

$23{,}5 = 0{,}3(25) + 16$

$23{,}5 = 7{,}5 + 16$

$23{,}5 = 23{,}5$ ☺

Rép: Les deux plants auront la même taille (23,5cm) à 25 jours.

**<u>Devoir du lundi 2 décembre</u> : manuel p. 192 (ai-je bien compris) + p.201 #1bdh + document d'exercices p.4-5 (# impairs)**

✓ **La résolution avec la méthode «PAR SUBSTITUTION» ($y_1 \rightarrow y_2$)**

a) Trouve la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2y + 18 = 8x \quad ① \\ y + 14x = 27 \quad ② \end{cases}$$

1- rendre l'équation sous la forme $y=ax+b$

② $y+14x=27$
$-14x \quad -14x$
$y=-14x+27.$

2- remplacer le y dans l'équation non travaillée par l'expression algébrique $(ax+b)$ trouvée à l'étape 1.

$y_2 \rightarrow y_1$
$2(-14x+27)+18=8x$
$-28x+\underbrace{54+18}=8x$
$-28x+72=8x$
$+28x \qquad +28x$
$\frac{72}{36}=\frac{36x}{36}$
$2=x.$

3- trouver la valeur de y en remplacant x dans une équation de départ

$y+14x=27.$
$y+14(2)=27$
$y+28=27$
$-28 \quad -28$
$y=-1$

4- Valider en remplacant x et y dans l'autre équation du départ

$2y+18=8x$
$2(-1)+18=8(2)$
$-2+18=16$
$16=16$ ☺.

5- Répondre sous forme de couple-solution s'il n'y a pas de contexte ou de phrase s'il y a un contexte

$(2,-1)$

b) Une bibliothèque offre une salle de consultation regroupant des postes informatiques, dont certains sont branchés à Internet. On dispose de deux fois moins de postes informatiques branchés à Internet que de postes sans branchement. Le nombre de postes qui n'ont pas le branchement Internet dépasse de 50 le nombre de postes branchés. Combien y a-t-il de postes avec branchement à Internet?

1- Variables

x: nb ordi avec branch.
y: nb ordi ss branch.

2- Éqns

#1: $\frac{y}{2} = x$

#2: $x + 50 = y$

3- Résoudre

$y \to y.$

$\frac{(x+50)}{2} = x.$

$0{,}5x + 25 = x$
$-0{,}5x \quad\quad -0{,}5x$

$\frac{25}{0{,}5} = \frac{0{,}5x}{0{,}5}$

50 ordi $= x$. avec branch.

4- trouver y

$y = x + 50$
$y = 50 + 50$
$y = 100$ ordi ss branch.

5- Valider

$\frac{y}{2} = x$

$\frac{100}{2} = 50$

$50 = 50$ !!

Il y a 50 ordinateurs avec branchement à Internet et 100 sans branchement.

**Devoir du mercredi 4 décembre** : manuel p. 194 (ai-je bien compris?) + p.201 #4bdeh

✓ **La résolution avec la méthode «PAR RÉDUCTION» ($y_1 - y_2$)**

a) Résous le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 21y - 9x = -98 \\ y - 2x = -17 \end{cases}$$

1- ordonner de façon identique les équations

$$\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix}21y \\ y\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-9x \\ -2x\end{matrix}} & \begin{matrix}= \\ =\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-98 \\ -17\end{matrix}} \\ \text{termes } y & \text{termes } x & = & \text{termes constants} \end{array}$$

← les équations sont ok :)

2- multiplier 1 ou 2 équations afin d'avoir le même coefficient devant 1 des deux variables.

$21y - 9x = -98 \longrightarrow 21y - 9x = -98$

$21 \cdot (y - 2x) = (-17) \cdot 21 \longrightarrow 21y - 42x = -357$

$\ominus$

$\frac{33x}{33} = \frac{259}{33}$

$x = \frac{259}{33}$ $(7{,}\overline{84})$

3- Soustraire les deux équations afin d'éliminer une variable

4- isoler la variable restante pour trouver sa valeur

5- trouver y avec une des deux équations du début

$y - 2x = -17$

$y - 2\left(\frac{259}{33}\right) = -17$

$y - \frac{518}{33} = -17$

$+\frac{518}{33} \quad +\frac{518}{33}$

$y = \frac{-43}{33}$ $(-1{,}\overline{30})$

6- Valider la solution avec l'autre équation du début

$21y - 9x = -98$

$21\left(\frac{-43}{33}\right) - 9\left(\frac{259}{33}\right) = -98$

$-98 = -98$ !!

7- Répondre en phrase s'il y a un contexte ou avec un couple solution $(x, y)$ s'il n'y a pas de contexte

$\left(\frac{259}{33}, \frac{-43}{33}\right)$

b) Dans une animalerie spécialisée dans la vente de chats et d'oiseaux, il y a 45 bêtes à vendre. De plus, on dénombre 170 pattes au total. Trouve le nombre de chats et d'oiseaux à vendre dans cette animalerie.

1- Variables

x: nb de chats

y: nb d'oiseaux

2- Éqns

#1: $x+y=45$

#2: $4x+2y=170$.

3- Résoudre

y-y

$2\cdot(x+y)=(45)\cdot 2 \rightarrow 2x+2y=90$

$4x+2y=170 \rightarrow 4x+2y=170$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-80}{-2}$

$x=40$ chats

4- trouver y

$x+y=45$

$40+y=45$

$-40 \quad -40$

$y=5$ oiseaux

Il y a 40 chats à vendre dans l'animalerie et 5 oiseaux.

5- Validation

$4x+2y=170$

$4(40)+2(5)=170$

$160+10=170$

$170=170$ :)

**<u>Devoir du jeudi 5 décembre</u> : manuel p. 197 (ai-je bien compris?)** ~~+ p.202 #7bgh~~

## ✓ Faire le meilleur choix lors de la résolution

Bien que chacune des méthodes algébriques de résolution permette de résoudre n'importe quel système d'équations, il y a des avantages à recourir à une méthode plutôt qu'à une autre, selon la forme sous laquelle se présente le système.

| | |
|---|---|
| Méthode de comparaison | Avantageuse lorsqu'**une** même variable est déjà isolée ou est facile à isoler dans les **deux** équations. |
| Méthode de substitution | Avantageuse lorsqu'**une** des variables est déjà isolée ou est facile à isoler dans **une** des équations. |
| Méthode de réduction | Avantageuse lorsque les deux équations qui constituent le système sont exprimées sous la forme $ax + by = c$. |

## ✓ Exemple synthèse

Dans un petit casse-croûte, 3 sandwichs et 4 jus de fruits coûtent 11,50 $ avant les taxes. Si tu achètes plutôt 4 sandwichs et 5 jus de fruits, cela coûte 14,75 $ avant les taxes. **Quel est le coût de 2 sandwichs et de 3 jus de fruit?**

1-Variables

x: Prix sandwich ($)

y: Prix jus ($)

2-Eqns

#1: $3x+4y=11,50$

#2: $4x+5y=14,75$

Q: $2x+3y=?$

3-Résoudre

$5\cdot(3x+4y=11,50)\cdot 5 \longrightarrow 15x+20y=57,50$

$4\cdot(4x+5y=14,75)\cdot 4 \longrightarrow 16x+20y=59$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus$

$\dfrac{-x}{-1} = \dfrac{-1,50}{-1}$

$x = 1,50$ $

4-trouver y

$3x+4y=11,50$

$3(1,50)+4y=11,50$

$4,50+4y=11,50$

$-4,50 \quad -4,50$

$\dfrac{4y}{4}=\dfrac{7}{4}$

$y=1,75$ $

5-Valider

$4x+5y=14,75$

$4(1,50)+5(1,75)=14,75$

$14,75=14,75$ ☺

6-Question-Réponse

$2x+3y=?$

$2(1,50)+3(1,75)=?$

$8,25\,\$=?$

Pour 2 sandwichs et 3 jus, le coût sera de 8,25 $

<u>**Devoir du vendredi 6 décembre**</u> **: manuel p.201 #2, 3, 6, 8b, 9acf, 15**

<u>**Devoirs semaine du 9 décembre ( pour l'examen du 13 décembre)**</u> **:**

**document d'exercices p.6 à 14**