corrigé

Chapitre 5
Notes de cours

Fonction exponentielle

Règle : $f(x) = a(b^x)$

a : ordonnée à l'origine

b : lien multiplicatif entre 2 valeurs de y pour lesquelles les valeurs associées de x ont augmenté de 1 (ou $b = \frac{f(x+1)}{f(x)}$)

Montrer l'utilisation des touches $\boxed{y^x}$ et $\sqrt[x]{\ }$ sur la calculatrice.

Créer la règle d'une fonction exponentielle

Il y a plusieurs façons de créer la règle d'une fonction exponentielle. Parfois, il faut calculer les valeurs de **a** et/ou de **b** mais parfois, elles nous sont données de façon implicite ou explicite.

Exemple 1 :

A) En laboratoire, une colonie de bactéries voit sa population augmenter de minute en minute. Voici une table de valeurs représentant le nombre de bactéries en fonction du temps écoulé. Quelle est la règle représentant cette situation ?

On doit chercher le temps 0.
↳ combien de bactéries.

Observons les régularités de cette table de valeurs :

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{405}{135} = 3$

ordonnée à l'origine (a)

IMPORTANT Ça doit être des bonds de +1

Temps (min.) x	Nombre de bactéries $f(x)$		
0	5	5 est égal à	$5 \cdot 3^0 = 5 \cdot 1 = 5$
1	15	15 est égal à	$5 \cdot 3^1 = 5 \cdot 3 = 15$
2	45	45 est égal à	$5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$
3 (+1)	135 (×3)	135 est égal à	$5 \cdot 3^3 = 5 \cdot 27 = 135$
4 (+1)	405 (×3)	405 est égal à	$5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$
5 (+1)	1215 (×3)	1215 est égal à	$5 \cdot 3^5 = 5 \cdot 243 = 1215$
6	3645	3645 est égal à	$5 \cdot 3^6 = 5 \cdot 729 = 3645$
x	y	y = $5 \cdot 3^x$	(règle)

$y = a \cdot b^x$

Quand la valeur du x augmente de 1, la valeur de y est multipliée par 3.

lien multiplicatif   b.

On doit toujours écrire la formule vierge pour trouver

3 façons de créer la règle d'une fonction exponentielle : $f(x) = a \cdot b^x$

IMPORTANT !

1ère façon : **Par observation ou compréhension de la situation**

ordonnée à l'origine.

mot clé → paramètre a

un bond de un!

exemple 2: Une colonie de bactéries dont la population initiale est de 5 bactéries double à chaque minute. On observe le nombre de bactéries selon le temps écoulé (min.) depuis le début de l'observation.

→ mot clé lien multiplicatif b.

règle : $f(x) = a \cdot b^x$

$f(x) = 5 \cdot b^x$

$f(x) = 5 \cdot b^x$

$f(x) = 5 \cdot 2^x$

au temps zéro → ordonnée à l'origine 5

Temps écoulé (min.)	Nombre de bactéries
0	5
1	10
2	20
3	40

+1 +1 +1 ×2 ×2 ×2

régle : $f(x) = 5 \cdot 2^x$

2e façon : **On connaît la valeur du « b » et un couple de valeurs.**

exemple 3 :

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1125}{2250} = 0,5$

x	f(x)
4	2250
5	1125
7	281,25

+1 ×0,5

pas un bond de un donc on s'en sert pas ← +2

règle: $f(x) = a \cdot b^x$

① on connait b → 0,5 dans le tableau.

$f(x) = a \cdot b^x$

$f(x) = a \cdot (0,5)^x$

② On utilise un couple pour trouver a (4, 2250)
x y

$2250 = a(0,5)^4$

$\frac{2250}{0,0625} = \frac{a \cdot 0,0625}{0,0625}$ $a = 36\,000$

régle : $f(x) = 36\,000(0,5)^x$

3e façon : **On connaît la valeur de « a » et un couple de valeurs.**

mot clé → a

exemple 4 : La valeur initiale d'une action est de 30$. On sait que 4 mois après son émission, elle vaut 43,92 $. La valeur de l'action varie selon une fonction exponentielle. On observe sa valeur selon le nombre de mois écoulé depuis son émission en bourse.

règle: $f(x) = a \cdot b^x$

$f(x) = 30 \cdot b^x$

Point (4; 43,92)
x y

On remplace le point dans la règle

$f(x) = 30b^x$ (4; 43,92)
x f(x)

$\frac{43,92}{30} = \frac{30 \cdot b^4}{30}$

$1,464 = b^4$

$\sqrt[4]{1,464} = \sqrt[4]{b^4}$

$1,1 \approx b.$

régle : $f(x) = 30(1,1)^x$

Calculer la valeur de y à partir de la règle et de x

Exemple 1 (suite) :B) Après 13 minutes, combien y aura-t-il de bactéries ?

→ représenté par x

rappel règle exemple 1: $f(x) = 5 \cdot 3^x$

on remplace x par 13

$f(x) = 5 \cdot 3^{13}$

$f(x) = 5 \cdot 1\,594\,323$

$f(x) = 7\,971\,615$

réponse: 7 971 615 bactéries.

Calculer la valeur de x à partir de la règle et de y

C'est la seule fois de l'année scolaire que vous êtes autorisés à procéder par essais-erreurs !

Exemple 1 (suite) : C) Après combien de temps y aura-t-il 98 415 bactéries ?

(toujours mettre un exemple de calcul)

Si y = 98 415 x = ?

Si x = 6 est-ce que y = 98 415? vérifions: $5 \cdot 3^6 = 5 \cdot 729 = 3645$ pas assez

Si x = 7 " " " " " $5 \cdot 3^7 = 5 \cdot 2187 = 10\,935$ pas assez

Si x = 8 " " " " " $5 \cdot 3^8 = 5 \cdot 6561 = 32805$ pas assez

Si x = 9 " " " " " $5 \cdot 3^9 = 5 \cdot 19683 = 98415$ oui !

Donc après 9 minutes.

Exemple 2 : Calculez la règle de chacune des fonctions exponentielles suivantes.

Trouver des bonds en x de 1

$b = \frac{y_2}{y_1}$ si bond de 1 en x

1ère table

x	f(x)
0	8
2	18
3	27
5	60,75
6	91,125

a : ordonnée à l'origine

+1 ·1,5

$\frac{27}{18} = 1{,}5$

1ère règle: $f(x) = 8 \cdot 1{,}5^x$

2e table

x	f(x)
3	y_1 10
4	y_2 100
6	10000
7	100000

$\frac{100}{10} = 10$

+1 x10

$f(x) = a \cdot 10^x$

(3, 10)
x y

$10 = a \cdot 10^3$

$\frac{10}{1000} = \frac{a \cdot 1000}{1000}$

$0{,}01 = a$

2e règle: $y = 0{,}01 \cdot (10)^x$

3e table

x	f(x)
2	y_1 320
3	y_2 80
4	20
5	5

+1 x0,25

C'est comme ÷ 4 mais on a besoin d'un x.

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{80}{320} = 0{,}25$

Donc dans $f(x) = a \cdot b^x$

on a $f(x) = a\,(0{,}25)^x$

on prend un point (2, 320)
x y

$320 = a\,(0{,}25)^2$

$320 = a \cdot 0{,}0625$

$\frac{320}{0{,}0625} = \frac{a \cdot 0{,}0625}{0{,}0625}$

$5120 = a$.

3e règle: $f(x) = 5120 \cdot 0{,}25^x$

$f(x) = 5120 \cdot (\frac{1}{4})^x$

Parenthèses obligatoires si fractions!

4e table

x	f(x)
0	1281,25
1	1025
2	820
5	419,84

+1 x0,8

$\frac{820}{1025} = 0{,}8$

4e règle: $f(x) = 1281{,}25 \cdot (0{,}8)^x$

Exemples de fonctions exponentielles qui ne sont pas des fonctions affines mais qui en ont l'air ! (+ ou – un %)

mot clé $100\% + 2\% = 102\%$

Exemple 3 : La population d'une ville augmente de 2% par année. En 1978, elle était de 20 000 habitants.

mot clé
valeur initiale.

$102\% \rightarrow \frac{102}{100} = 1{,}02$

A) Combien sera-t-elle en 2034 ?

▶ Ajouter 2% par année par rapport à la population précédente c'est comme $\times 1{,}02$ alors b = $1{,}02$.

$y = a \cdot b^x$

a : ordonnée à l'origine : 20000

b : lien multiplicatif : 1,02

$y = 20000 \cdot 1{,}02^x$

	Temps écoulé depuis 1978	Nombre d'habitants
1978	0	20 000
1979	1	20 400
⋮	2	20 808
2034	56	60 623,31

+1

Si x=1 alors $y = 20000 \cdot 1{,}02^1 = 20400$

Si x=2 alors $y = 20000 \cdot 1{,}02^2$

$20\,000 \cdot 1{,}0404 = 20808$

Si x=56 alors $y = 20000 \cdot 1{,}02^{56}$

$y = 20\,000 \cdot 3{,}031 = 60\,623{,}31$

$2034 - 1978 = 56$ ans écoulés

Réponse : ≈ 60 623 habitants

B) Environ combien de fois plus grande est la population en 2034 qu'en 1978 ?

$60\,623{,}31 \div 20000 = 3{,}03$

Donc environ 3 fois plus grande.

Exemple 4 : La valeur initiale d'une voiture se déprécie au fil des années, c'est connu. Elle perd 10% de sa valeur à chaque année contrairement à un piano, dont la valeur initiale augmente avec le temps, s'il est bien entretenu. Sachant que la voiture de Philibert a coûté 52 000 $, combien vaudra-t-elle dans 10 ans ?

$100\% - 10\%$

▶ Enlever 10% par année par rapport à la valeur précédente c'est comme $100\% - 10\% = 90\%$ alors b = $0{,}9$.

$\frac{90}{100} = 0{,}9$.

$\times 0{,}90$.

Temps écoulé depuis l'achat (ans)	Valeur de la voiture ($)
0	52 000
1	46 800
2	42 120
⋮ 10	18 131,28 ?

$\times 0{,}9$

$y = a \cdot b^x$

$y = 52000 \cdot (0{,}9)^x$

$y = 52\,000\,(0{,}9)^{10}$ Si x = 10

$y = 52\,000 \cdot (0{,}34867844)$

$y = 18\,131{,}28$

Réponse : 18 131,28 $

Représenter graphiquement une fonction exponentielle

Comme la fonction exponentielle peut augmenter ou diminuer très rapidement, il est préférable de la représenter à l'aide de couples de valeurs consécutifs et ce, aux alentours de l'ordonnée à l'origine.

Représentons graphiquement 2 exemples parmi ceux que nous avons déjà travaillés. Remarquons que ces 2 exemples sont contextualisés …

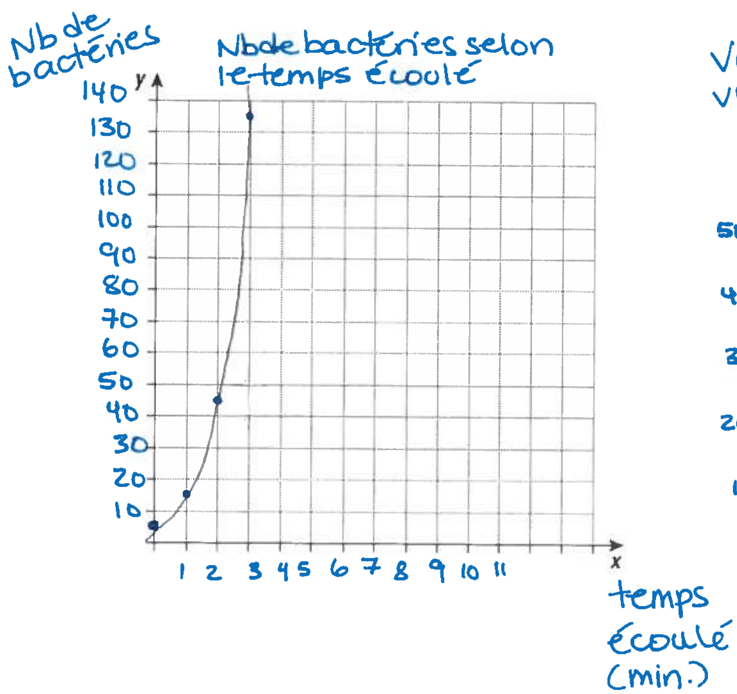
Exemple 1 :

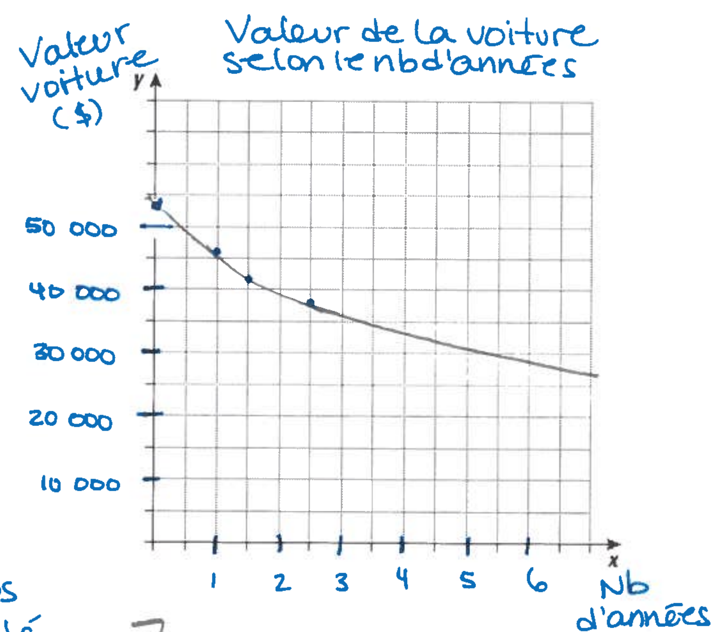
Temps écoulé (min.)	Nombre de bactéries
0	5
1	15
2	45
3	135

Exemple 4 :

Nombre d'années	Valeur voiture ($)
0	52 000
1	46 800
2	42 120
3	37 908

* placer au moins 3 pts consécutifs



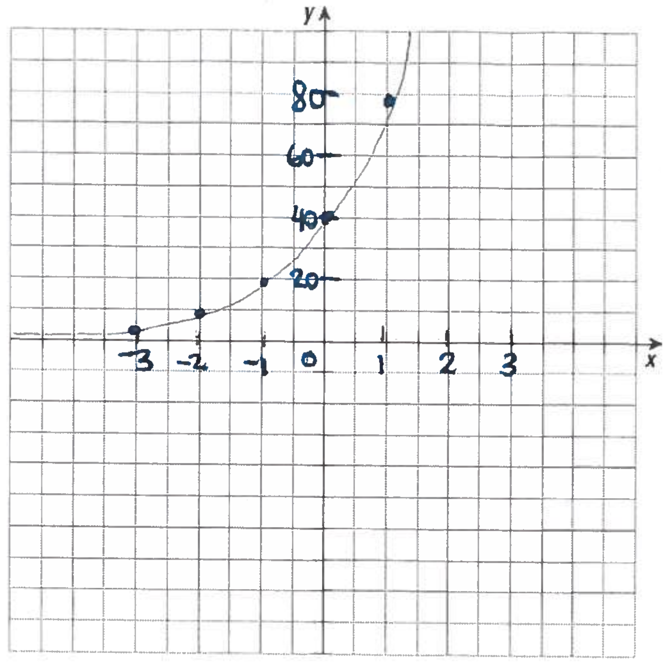


* important : montrer que c'est une courbe !

Exemples sans contexte :

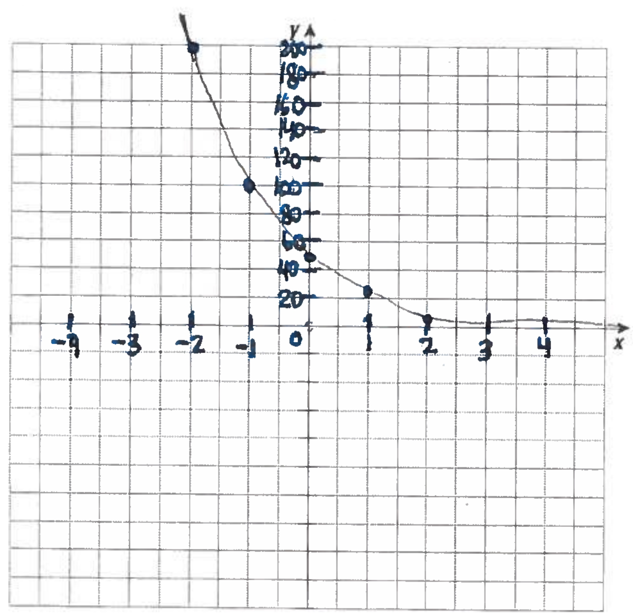
Exemple :

x	-2	-1	0	1	2
y	10	20	40	80	160



Exemple :

x	-2	-1	0	1	2
y	200	100	50	25	12,5

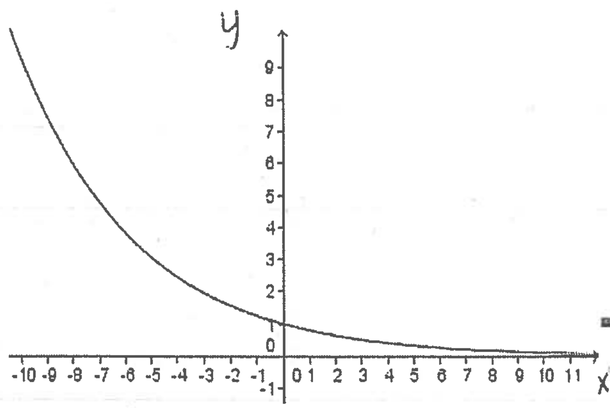


Graphique d'une fonction exponentielle

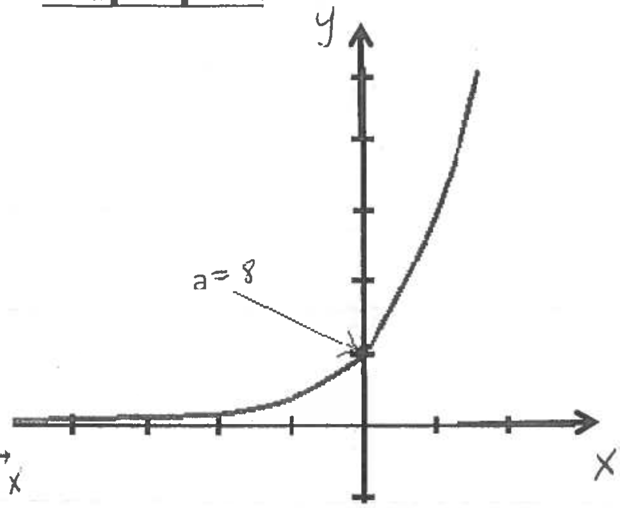
- Une fonction exponentielle est toujours représentée par une courbe croissante ou décroissante ne passant pas par (0, 0).
- La courbe est asymptotique par rapport à l'axe des x, c'est-à-dire qu'elle s'en rapproche de plus en plus sans jamais le croiser.

Propriétés de la fonction exponentielle

Graphique 1



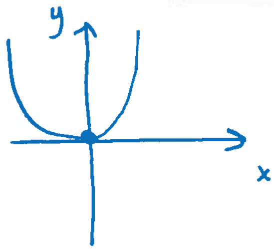
Graphique 2



Propriétés	Graphique 1	Graphique 2
Domaine	$x \in]-\infty, +\infty[$	$x \in]-\infty, +\infty[$
Image ou codomaine	$y \in]0, +\infty[$	$y \in]0, +\infty[$
Ordonnée à l'origine	$y = 1$	$y = 8$
Abscisse(s) à l'origine ou zéro(s)	aucune	aucune
Extremums	maximum : aucun minimum : aucun	idem idem
Variation	croissante : jamais décroissante : $]-\infty, +\infty[$	croissante : $]-\infty, +\infty[$ décroissante : jamais
Signe	positive : $]-\infty, +\infty[$ négative : jamais	positive : $]-\infty, +\infty[$ négative : jamais

FONCTION QUADRATIQUE OU DU SECOND DEGRÉ

Règle : $f(x) = ax^2$



a : Il a un effet vertical sur la courbe représentant cette fonction.

- S'il est positif, la courbe sera tournée vers le haut.
- S'il est négatif, elle sera tournée vers le bas.
- Si l'on ne tient pas compte de son signe, lorsque **a** est plus grand que 1 et qu'on l'augmente, la courbe va s'étirer (se dilater) verticalement.
- Si 0 < **a** < 1 et qu'on le diminue, la courbe va se contracter verticalement.

passe par (0,0) TOUJOURS

CRÉER LA RÈGLE D'UNE FONCTION QUADRATIQUE

Exemple 1 : Voici une table de valeurs représentant le coût de fabrication d'une pièce métallique carrée selon la mesure d'un de ses côtés.

en 1er

On vérifie si c'est une fonction quadratique en calculant les accroissements du 2^{e} niveau. Si ces accroissements sont constants, alors c'est une fonction du second degré. (quadratique).

accroissements 1er niveau

accroissements 2^{e} niveau

Mesure d'un côté (m)	Coût ($) de la pièce
3	114,75
4	204
5	318,75
6	459
7	624,75

+89,25
+114,75
+140,25
+165,75

+25,5
+25,5
+25,5

→ Constants
Alors fonction du 2^{e} degré
→ quadratique.

Cette valeur l'a n'est pas importante.

$y = ax^2$

en 2^{e}

Pour créer la règle d'une fonction quadratique, on n'a qu'à remplacer x et y par n'importe quel couple de valeurs connu (sauf (0, 0)) et isoler le paramètre **a**. dans la fonction de base.

$y = ax^2$ $\quad (\underset{x}{4}, \underset{y}{204})$

$204 = a(4)^2$

$\frac{204}{16} = \frac{a \cdot 16}{16}$

$12{,}75 = a$

règle : $f(x) = 12{,}75x^2$

Pour mieux comprendre ce qui se produit dans cette situation (la règle), on peut aussi valider si c'est une fonction du 2e degré de la façon suivante :

Mesure d'un côté (m)	Aire carré	Coût ($) de la pièce
3	9	114,75
4	16	204
5	25	318,75
6	36	459
7	49	624,75
x	x^2	$12{,}75x^2$

$\times 12{,}75$

$f(x) = 12{,}75x^2$

Calculer la valeur de y à partir de la règle et de x

Exemple 1 : Quelle est la valeur de f(13) ? ou

Combien coûtera la pièce sachant que la mesure de son côté est de 13 mètres ?

$f(x) = 12{,}75x^2$ si $x = 13$

$f(x) = 12{,}75(13)^2$

$f(x) = 12{,}75 \cdot 169$

$f(x) = 2154{,}75$ $

La pièce coûtera 2154,75 $

Calculer la valeur de x à partir de la règle et de y

Exemple 1 : Calcule la valeur de x si f(x)=1032,75. ou

Quelle est la longueur d'un côté de la pièce sachant qu'elle a coûté 1032,75$?

$f(x) = 12{,}75x^2$ si $f(x) = 1032{,}75$

$\frac{1032{,}75}{12{,}75} = \frac{12{,}75x^2}{12{,}75}$

$81 = x^2$

$\pm\sqrt{81} = \sqrt{x^2}$ → Dès qu'on fait une $\sqrt{\ }$, on doit considérer 2 réponses $\pm$

$\pm 9 = x \rightarrow x = 9$

$\rightarrow x = -9$ → on rejete la réponse puisqu'une longueur ne peut être négative

Réponse : Le côté mesure 9 m.

Représenter graphiquement une fonction quadratique

- La courbe représentant une fonction quadratique s'appelle une parabole.
- Elle passe toujours par (0, 0). Ce point se nomme le sommet de la parabole.
- Il y a toujours un axe de symétrie vertical qui passe par le sommet.

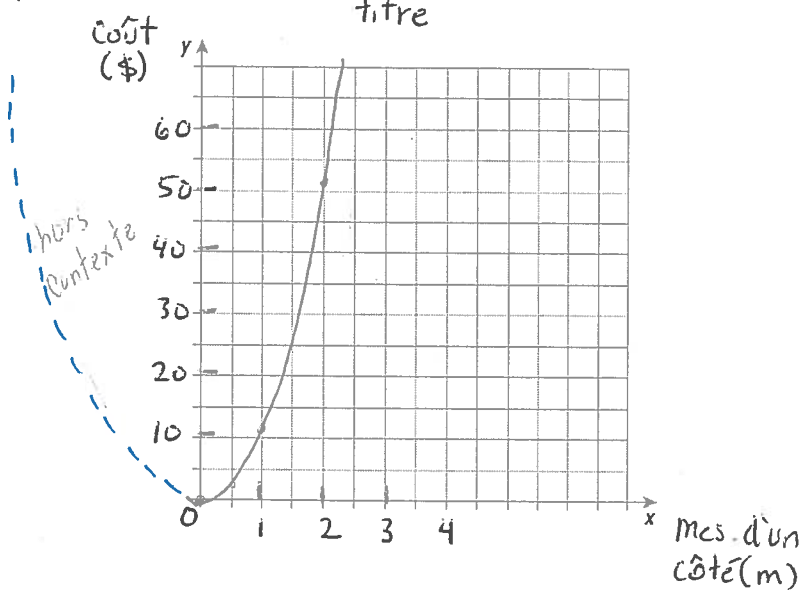
Pour graduer l'axe des y, on fait de son mieux ! Cela n'est pas évident la majorité du temps car les valeurs de y augmentent rapidement.
Il est plus facile de placer (0, 0) et les 2 points précédents et/ou suivants.

Exemple 1 : Comme cet exemple est contextualisé, on trace seulement la partie de la parabole située dans le 1[er] quadrant.

$y = 12{,}75x^2$

Mesure d'un côté (m)	Coût ($) de la pièce
3	114,75
4	204
5	318,75
6	459
7	624,75
2	51
1	12,75
0	0

départ important → 0



EXEMPLE 2 : Trace les graphiques représentant les 2 fonctions du second degré suivantes.

A) $f(x) = 0{,}8x^2$

x	f(x)
-2	3,2
-1	0,8
0	0
1	0,8
2	3,2

centre → sommet →

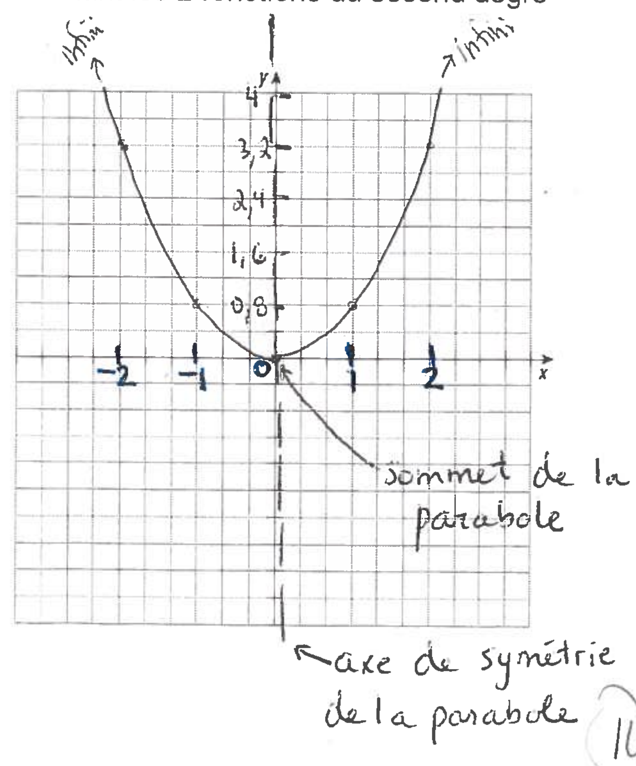
-2 -1 +2 +1

si $x = -2 \rightarrow y = 0{,}8(-2)^2$

$y = 0{,}8 \cdot 4$

$y = 3{,}2$

si $x = -1 \rightarrow y = 0{,}8(-1)^2 = 0{,}8$



B) $f(x) = -5x^2$

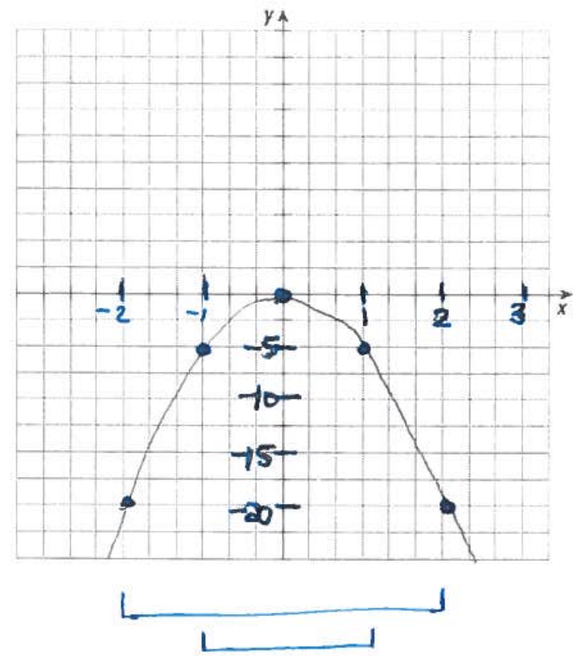
x	f(x)
-2	-20
-1	-5
0	0
1	-5
2	-20

$f(-2) = -5(-2)^2$
$= -5(4)$
$= -20$

$f(-1) = -5(-1)^2$
$= -5 \cdot 1$
$= -5$

$f(1) = -5(1)^2$
$= -5 \cdot 1$
$= -5$

$f(2) = -5 \cdot 2^2$
$= -5 \cdot 4$
$= -20$



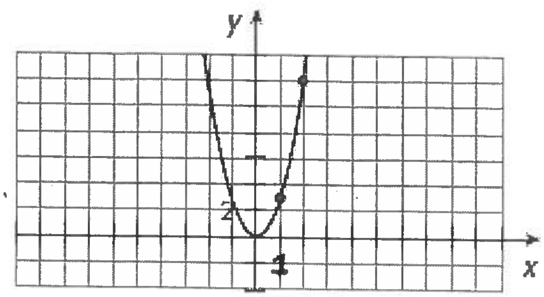
points symétriques.

N'OUBLIE PAS !

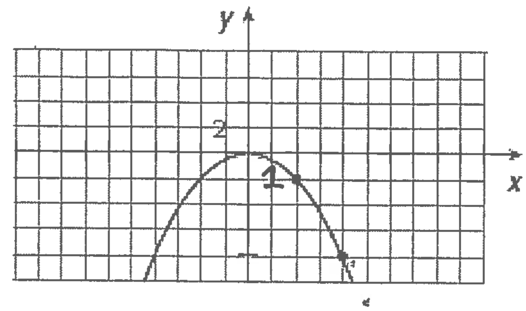
- ▶ Lorsque le paramètre **a** est positif, la parabole est tounée vers le haut.
- ▶ Lorsque le paramètre **a** est négatif, la parabole est tounée vers le bas.

Propriétés de la fonction quadratique

Graphique 1



Graphique 2



Propriétés	Graphique 1	Graphique 2
Domaine	$x \in]-\infty, +\infty[$	$x \in]-\infty, +\infty[$
Image ou codomaine	$y \in [0, +\infty[$	$y \in]-\infty, 0]$
Ordonnée à l'origine	$y = 0$	$y = 0$
Abscisse(s) à l'origine ou zéro(s)	$x = 0$	$x = 0$
Extremums	maximum : aucun minimum : $y = 0$	maximum : $y = 0$ minimum : aucun
Variation	croissante : $x \in [0, +\infty[$ décroissante : $x \in]-\infty, 0]$	croissante : $x \in]-\infty, 0]$ décroissante : $x \in [0, +\infty[$
Signe	positive : $x \in]-\infty, +\infty[$ négative : jamais	positive : jamais négative : $x \in]-\infty, +\infty[$

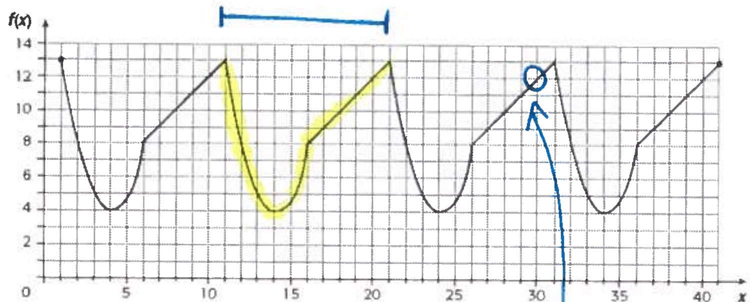
FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction est périodique (cyclique) lorsque sa représentation graphique est constituée d'un « motif » qui se répète.

L'écart entre les abscisses des points situés aux extrémités de ce « motif » correspond à la période (cycle) de la fonction.

EXEMPLE1 :

11 21



A) période : 21−11= 10

On veut obtenir un nombre entre 0 et 40 puisqu'on peut le voir dans le graphique.

B) Si x vaut 100, que vaut y ?

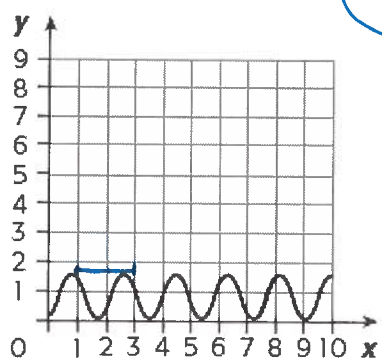
on calcule f(100)

On part de 100 et on recule, on enlève des périodes 100−10−10−10−10−10−10−10 = 30

Donc à 30 c'est équivalent à 100

y=12.

Exemple 2 :



période : environ 2.

Exemple 3 :

x	y
4	1 600
5	1 200
7	120
10	1 600
11	1 200
13	120

même valeur donc

10−4 = 6

période : 6.