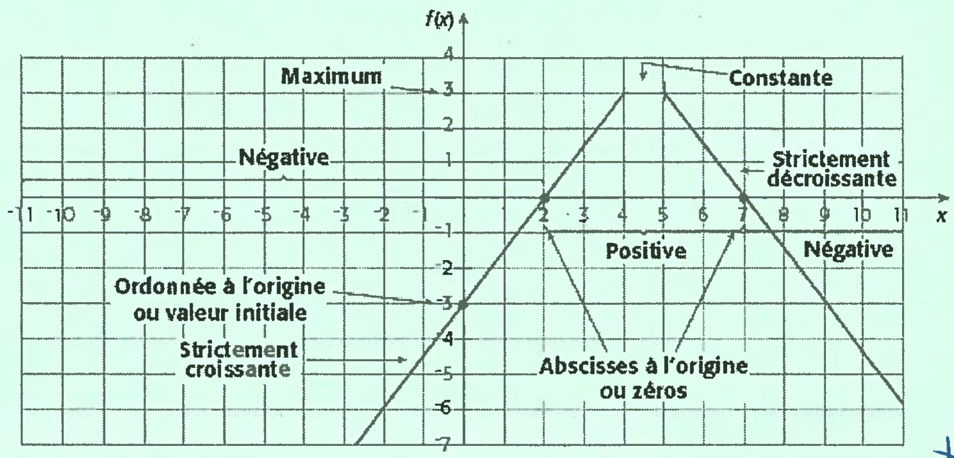
☆ NOTES DE COURS - CHAPITRE 1 → SECTION 1 ☆

Les propriétés d'une fonction

Faire l'analyse d'une fonction consiste à décrire ses propriétés. Soit la représentation graphique de la fonction *f* ci-dessous.



Le domaine et l'image

Y → IMMO

	Définition	Exemple
Domaine gauche-droite	Ensemble des valeurs que prend la variable <u>indépendante</u>.	$dom\,f =]-\infty, +\infty[$ ou $x \in \mathbb{R}$. $dom\,f = \mathbb{R}$
Y Image (ou codomaine) Bas-haut	Ensemble des valeurs que prend la variable <u>dépendante</u>.	$Ima\,f =]-\infty, 3]$ ou $f(x) \in]-\infty, 3]$

Les coordonnées à l'origine

	Définition	Exemple
<u>abscisse(s)</u> à l'origine ou <u>zéros</u> de la fonction	Valeur(s) de la variable indépendante pour laquelle (lesquelles) la variable dépendante vaut zéro. Une fonction peut ne pas avoir d'abscisses à l'origine, en avoir une ou en avoir plusieurs.	$x \in \{2, 7\}$. ou $x = 2$ et $x = 7$.
Y <u>ordonnée</u> à l'origine ou valeur initiale	Valeur de la variable dépendante lorsque la variable indépendante vaut zéro. Une fonction peut avoir une ordonnée à l'origine ou ne pas en avoir.	$y \in \{-3\}$ ou $y = -3$. ou $f(0) = -3$

Remarque : Par coordonnée à l'origine, on entend la valeur d'une des coordonnées lorsque l'autre coordonnée vaut <u>zéro</u>.

Le signe

	Définition	*Exemple*
Positive	Intervalle(s) du domaine pour lequel (lesquels) les valeurs de la variable dépendante sont positives et/ou nulles .	La fonction *f* est positive pour $x \in [2,7]$.
Négative	Intervalle(s) du domaine pour lequel (lesquels) les valeurs de la variable dépendante sont négatives et/ou nulles.	La fonction *f* est négative pour $x \in]-\infty, 2] \cup [7, +\infty[$.

** Lorsque la variable dépendante est nulle, la fonction est à la fois négative et positive.*

Les extremums

	Définition	*Exemple*
Y Maximum	Valeur la plus élevée de la fonction sur tout son domaine.	Max f = 3
Y Minimum	Valeur la moins élevée de la fonction sur tout son domaine.	Min f = ∅ ou la fonction f n'a pas de minimum.

La variation

	Définition	*Exemple*
Strictement croissante	Intervalle(s) du domaine sur lequel (lesquels) la fonction augmente..	La fonction *f* est strictement croissante pour $x \in]-\infty, 4]$.
Strictement décroissante	Intervalle(s) du domaine sur lequel (lesquels) la fonction diminue.	La fonction *f* est strictement décroissante pour $x \in [5, +\infty[$.
Constance	Intervalle(s) du domaine sur lequel (lesquels) la fonction ne subit aucune variation (variation nulle).	La fonction *f* est constante pour $x \in [4,5]$.

* croissante /décroissante = inclure les plateaux *

NOTES DE COURS - CHAPITRE 1 → SECTION 2

Les fonctions définies par parties

Une fonction définie par parties est une fonction dont la règle s'exprime comme un

Ensemble de règles définies sur différents intervalles de son domaine. Bien qu'elle soit formée de plusieurs parties, la fonction définie par parties est **une seule** fonction.

La fonction en escalier

La fonction en escalier est une fonction définie par parties.

Caractéristique	Manifestation dans le graphique
La fonction est constante sur chaque intervalle du domaine.	Le graphique est formé de segments horizontaux ou de demi-droites horizontales. Généralement, les segments ont un point fermé (inclu) à une extrémité et un point ouvert (exclu) à l'autre.
La fonction possède des valeurs critiques.	Aux valeurs critiques, la fonction varie par saut.
La fonction est discontinue.	Le graphique de la fonction ne peut pas être tracé sans lever le crayon.

GRAPHIQUE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

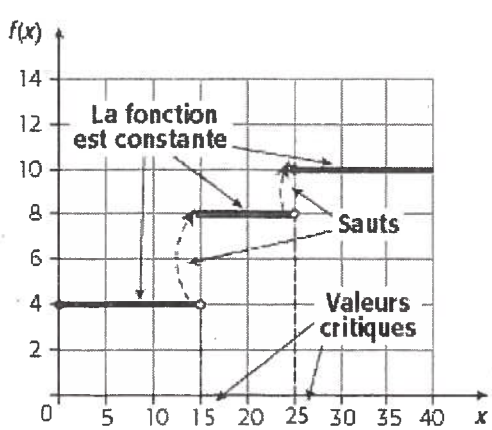


Table de valeurs associée au graphique de gauche

x	F(x)
[0,15[	4
[15,25[	8
[25,+∞[	10

***Exemple*:**

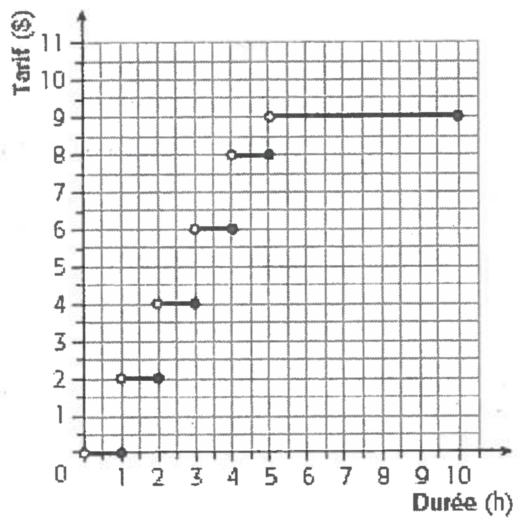
Le stationnement d'un centre-ville est ouvert tous les jours. Voici le tarif du stationnement.

- La première heure est gratuite ;
- chaque heure supplémentaire partielle ou complète coûte 2 $;
- le tarif maximal pour une journée est de 9 $.

Soit *x*, le temps d'utilisation du stationnement du marché public (en heures) et *t*(*x*), le tarif de stationnement (en dollars).

GRAPHIQUE

Le tarif de stationnement au centre-ville



Y → IMMO

Propriété	Valeur
Domaine	dom f =]0, 10] ou x ∈]0, 10]
Y Image	Ima f = {0, 2, 4, 6, 8, 9} ou f(x) = { }
Abscisses à l'origine	x ∈]0, 1]
Y Ordonnée à l'origine	la fonction n'a pas d'ordonnée à l'origine.
Signe	Positive sur son domaine ; négative pour x ∈]0, 1]
Y Extremums	Max f = 9 ; min f = 0
Variation	croissante sur son domaine

Les modes de représentation d'une fonction en escalier

En plus de la représentation graphique ou en mots, la fonction en escalier peut être représentée à l'aide d'une règle. Cette règle s'écrit comme un ensemble de règles de fonctions constantes définies sur différents intervalles du domaine.

Voici **la règle** de la fonction qui modélise les tarifs du stationnement du centre-ville (page précédente) :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < x \leq 1 \\ 2 \text{ pour } 1 < x \leq 2 \\ 4 \text{ pour } 2 < x \leq 3 \\ 6 \text{ pour } 3 < x \leq 4 \\ 8 \text{ pour } 4 < x \leq 5 \\ 9 \text{ pour } \boxed{5 < x \leq 10} \end{cases}$$

On peut remarquer que l'**image** de cette fonction correspond aux valeurs de f(x) dans la règle :
$\{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ * à mettre dans l'ordre selon le graphique *

On peut remarquer que le **domaine** débute avec la 1ère valeur des x et se termine avec la dernière valeur de ceux-ci : $]0, 10]$

Table de valeurs associée à la règle ci-dessus :

x	F(x)
]0,1]	0
]1,2]	2
]2,3]	4
]3,4]	6
]4,5]	8
]5,10]	9

As-tu remarqué les liens entre les divers éléments du graphique, de la règle et de la table de valeurs ?

Point fermé (plein) sur le graphique donc **≤** dans la règle et donc **[** (inclus) dans la table de valeurs.

Point ouvert (vide) sur le graphique donc **<** dans la règle et donc **]** (exclu) dans la table de valeurs.

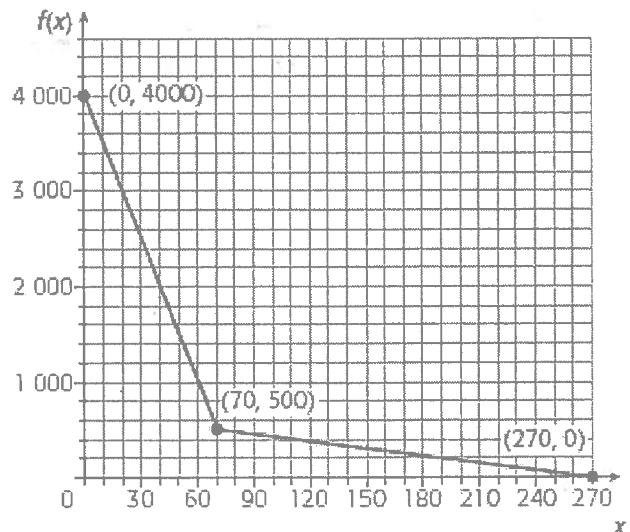
★ NOTES DE COURS - CHAPITRE 1 → SECTION 3 ★

La fonction affine par parties

La fonction affine par parties est une fonction définie par parties. Il s'agit d'une fonction constituée de plusieurs fonctions affines définies sur différents intervalles de son domaine.

Exemple :

GRAPHIQUE D'UNE FONCTION PAR PARTIES



Propriétés de la fonction *f*.

Domaine	$Dom f = [0,270]$ ou $x \in [0,270]$
Image	$Ima f = [0,4000]$ ou $f(x) \in [0,4000]$
Abscisse à l'origine	$x = 270$
Ordonnée à l'origine	$f(0) = 4000$
Signe	La fonction f est positive sur son domaine
Extremums	$Max f = 4000$; $Min f = 0$
Variation	La fonction est strictement décroissante pour $x \in [0,270]$.

La règle d'une fonction affine par parties

En plus de la représentation graphique, la fonction affine par parties peut être représentée à l'aide d'une règle Cette règle s'écrit comme un ensemble de règles de fonctions affines définies sur différents intervalles du domaine Il faut donc déterminer autant de règles que la fonction a de parties.

Étapes à suivre pour déterminer la règle d'une fonction affine par parties

Étant donné que cette fonction affine par parties comporte 2 parties, il faut déterminer 2 règles qui seront ensuite vu comme formant une seule règle.

1ère partie : Intervalle du domaine $[0,70]$	2e partie : Intervalle du domaine $[70,270]$
$(0,4000)$ et $(70,500)$ $x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$ $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{500-4000}{70-0} = \frac{-3500}{70} = -50$ b : $y = -50x + b \; (0,4000)$ $4000 = -50(0) + b$ $4000 = b$ Validation : $y = -50x + 4000$ $(70,500)$ $500 = -50(70) + 4000$ $500 = 500$ ☺ Règle : $f(x) = -50x + 4000$	$(70,500)$ et $(270,0)$ $x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$ $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-500}{270-70} = \frac{-500}{200} = -\frac{5}{2}$ b : $y = -\frac{5}{2}x + b \; (70,500)$ $500 = -\frac{5}{2}(70) + b$ $500 = -175 + b$ $+175 \quad +175$ $675 = b$ Validation : $y = -\frac{5}{2}x + 675 \; (270,0)$ $0 = -\frac{5}{2}(270) + 675$ $0 = 0$ ☺ Règle : $f(x) = -\frac{5}{2}x + 675$

LA RÈGLE DE LA FONCTION f

Cette règle est constituée des règles de 2 fonctions affines définies sur 2 différents intervalles du domaine

$$\textit{RÈGLE} : f(x) = \begin{cases} -50x + 4000 & \text{pour } 0 \leq x \leq 70 \\ -\frac{5}{2}x + 675 & \text{pour } 70 < x \leq 270 \end{cases}$$

Remarques :

— La table de valeurs n'est pas un mode de représentation utile. pour ce type de fonction

— Une fonction affine par parties peut être discontinue donc il ne faut jamais prendre pour acquis qu'une droite commence où la précédente se termine. Il faut calculer les coordonnées des 2 points situés aux extrémités de chaque droite.

Contruire un graphique à partir de la règle d'une fonction affine par parties.

Exemple : Représente cette fonction graphiquement :

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad -2 \leq x \leqslant 10 \\ 0{,}5x + 5 & si \quad 10 \leqslant x \leq 20 \\ 15 & si \quad x \geqslant 20 \end{cases}$$

si $x=-2 \rightarrow y=x$
$y=-2$
si $x=0 \rightarrow y=x$
$y=0$
si $x=10 \rightarrow y=x$
$y=10$

si $x=10 \rightarrow y=0{,}5x+5$
$y=0{,}5(10)+5$
$y=5+5=10$
si $x=15 \rightarrow y=0{,}5x+5$
$y=0{,}5(15)+5$
$y=7{,}5+5=12{,}5$
si $x=20 \rightarrow y=0{,}5x+5$
$y=0{,}5(20)+5$
$y=10+5=15$

si $x=20 \rightarrow y=15$
si $x=22 \rightarrow y=15$
si $x=24 \rightarrow y=15$

x	y
−2	−2
0	0
10	10
10	10
15	12,5
20	15
20	15
22	15
24	15