SAVOIRS 1.1 La racine cubique et les exposants

1.1.1 LA RACINE CUBIQUE

- L'opération inverse de celle qui consiste à élever un nombre au cube est appelée ***extraction de la racine cubique.*** Le symbole de cette opération est $\sqrt[3]{\ }$.
- Le nombre élevé au cube qui donne a est appelé ***racine cubique*** de a. La racine cubique de a se note $\sqrt[3]{a}$.

Exemples : **1)** La racine cubique de 64, notée $\sqrt[3]{64}$, est 4, car $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

2) $\sqrt[3]{^-125} = {}^-5$, car ${}^-5 \times {}^-5 \times {}^-5 = ({}^-5)^3 = {}^-125$.

1.1.2 LA NOTATION EXPONENTIELLE

Dans certains cas, il est possible de transformer une expression écrite sous la forme exponentielle en une expression écrite sous la forme fractionnaire ou comportant un radical.

Notation	*Exemple*
Pour une base $a \neq 0$ et un exposant entier $m > 0$: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
Pour une base $a > 0$ et l'exposant $\frac{1}{2}$: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$
Pour une base a et l'exposant $\frac{1}{3}$: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$	$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

1.1.3 LES LOIS DES EXPOSANTS

- Les lois des exposants permettent d'effectuer des opérations qui font intervenir des expressions écrites sous la forme exponentielle.

Loi		*Exemple*
Produit de puissances Pour $a \neq 0$:	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^4 \times 3^6 = 3^{4+6} = 3^{10} = 59\ 049$
Quotient de puissances Pour $a \neq 0$:	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^9}{2^5} = 2^{9-5} = 2^4 = 16$
Puissance d'un produit Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$:	$(ab)^m = a^m b^m$	$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$
Puissance d'une puissance Pour $a \neq 0$:	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15\ 625$
Puissance d'un quotient Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$:	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9^2}{5^2} = \frac{81}{25} = 3{,}24$

1

- On utilise les lois des exposants pour effectuer des changements de base et réduire des expressions numériques.

Exemple : On veut écrire l'expression $\frac{16^2 \times 4^{-3}}{2^3}$ sous la forme d'une puissance de la plus petite base possible.

$$\frac{16^2 \times 4^{-3}}{2^3} = \frac{(2^4)^2}{2^3 \times 4^3} = \frac{2^{4 \times 2}}{2^3 \times (2^2)^3} = \frac{2^8}{2^3 \times 2^{2 \times 3}} = \frac{2^8}{2^3 \times 2^6} = \frac{2^8}{2^{3+6}} = \frac{2^8}{2^9} = 2^{8-9} = 2^{-1}$$

RENFORCEMENT 1.1 La racine cubique et les exposants

1 Récris chacune des expressions suivantes de façon à éliminer l'exposant.

a) $3^{\frac{1}{2}}$ ________ **b)** $7^{\frac{1}{3}}$ ________ **c)** $^-17^{\frac{1}{2}}$ ________

d) $(^-11)^{\frac{1}{3}}$ ________ **e)** $^-23^{\frac{1}{3}}$ ________ **f)** $^-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ________

2 Récris chacune des expressions suivantes de façon à éliminer le radical.

a) $\sqrt{21}$ ________ **b)** $\sqrt[3]{15}$ ________ **c)** $\sqrt[3]{^-19}$ ________

d) $^-\sqrt[3]{87}$ ________ **e)** $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ________ **f)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}}$ ________

3 Calcule, lorsque c'est possible, la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\sqrt{36}$ ________ **b)** $\sqrt[3]{^-64}$ ________ **c)** $\sqrt{^-16}$ ________

d) $^-\sqrt{16}$ ________ **e)** $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$ ________ **f)** $\sqrt{\frac{9}{25}}$ ________

4 Dans chaque cas, détermine la ou les valeurs de *a*.

a) $a^2 = 49$ ________ **b)** $a^3 = {}^-27$ ________ **c)** $\sqrt{a} = 11$ ________

d) $\sqrt[3]{a} = 0{,}2$ ________ **e)** $\sqrt{a} = 0{,}5$ ________ **f)** $\sqrt[3]{^-0{,}125} = a$ ________

5 Indique si chacun des énoncés ci-dessous est vrai ou faux.

	Vrai	Faux
a) La racine cubique d'un nombre existe toujours.	☐	☐
b) La racine carrée d'un nombre existe toujours.	☐	☐
c) Lorsqu'on multiplie deux bases différentes affectées d'exposants identiques, on additionne les bases.	☐	☐
d) La n^e puissance d'un produit équivaut au produit des n^{es} puissances des facteurs concernés.	☐	☐
e) La n^e puissance d'une somme équivaut à la somme des n^{es} puissances des termes utilisés.	☐	☐

6 Récris chaque expression sous la forme d'une puissance de la base.

a) $5^5 \times 5^4$ ______

b) $3^4 \times 3^2$ ______

c) $\frac{2^{10}}{2^3}$ ______

d) $(7^7)^7$ ______

e) $\left(\frac{3^{12}}{3^5}\right)^3$ ______

f) $\frac{11^4 \times 11^6}{11^2}$ ______

g) $(13 \times 13^{11})^2$ ______

h) $(5^{-3} \times 5^{-6})^{-2}$ ______

i) $\left(\frac{17^{-17} \times 17^8}{17^3}\right)^3$ ______

j) $\sqrt{\frac{15^3 \times 15^{18}}{15^{-7}}}$ ______

k) $\frac{(2^{11} \times 2^{-5})^2}{(2^3)^{-3}}$ ______

l) $(5^7 \times 5)^3 \times 5^{-1}$ ______

7 Récris chaque expression sous la forme d'une puissance positive de la plus petite base possible.

a) 4^3 ______

b) $49^2 \times 7^5$ ______

c) $\frac{27^3 \times 9^2}{81^{-4}}$ ______

d) $(125^2)^4 \times 25^{-4}$ ______

e) $\left(\frac{121^3}{11^2}\right)^2$ ______

f) $\left(\frac{13^3 \times 2197}{169^{-1}}\right)^2$ ______

8 Récris chacune des expressions suivantes de façon à faire intervenir des puissances positives des plus petites bases possibles.

a) $\frac{11^3 \times 121^4}{2^4 \times 2^3}$ ______

b) $\frac{4^2 \times 16}{(9^2)^5}$ ______

c) $(25^3 \div 4^5)^3$ ______

d) $\frac{8^3 \times 125}{25^4 \times 64}$ ______

e) $\frac{(11^4 \times 1331^2)^2}{(27^2)^5}$ ______

f) $\left(\frac{49^4}{169^6}\right)^2 \times \left(\frac{13^7}{7}\right)^{-2}$ ______

g) $\frac{2 \times (289^3)^2}{(17^{11} \times 4^5)^{-3}}$ ______

h) $\left(\frac{4^5}{121^{-2} \times 8}\right)^5 \times \frac{11^{-7}}{16^{-3}}$ ______

ENRICHISSEMENT 1.1 La racine cubique et les exposants

1 Démontre chacune des égalités suivantes.

a) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$

b) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$

c) $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$

d) $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$

2 Détermine, lorsque c'est possible, la valeur numérique de chacune des expressions suivantes.

a) $4^{\frac{3}{2}}$

b) $8^{\frac{2}{3}}$

c) $49^{\frac{5}{2}}$

d) $(^-27)^{\frac{4}{3}}$

e) $^-27^{\frac{4}{3}}$

f) $(^-25)^{\frac{5}{2}}$

g) $^-25^{\frac{5}{2}}$

h) $4^{-\frac{7}{2}}$

i) $64^{-\frac{2}{3}}$