CHAPITRE 2 Les relations et les fonctions

RENFORCEMENT 2.1 Les relations, les réciproques et les fonctions

Page 285

1. **a)**, **c)**, **d)**, **e)**, **g)**

2. **a)** 1)

x	y
3	0
6	1
9	2
12	3
15	4

2) Oui.

b) 1)

x	y
0	-3
1	-2
3	-1
1	-2
0	-3

2) Non.

c) 1)

x	y
0	-3
1	-2
3	-1
1	2
0	3

2) Non.

d) 1)

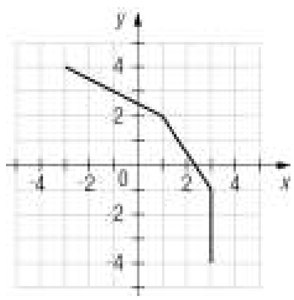
x	y
105	20
43	30
-66	70
21	90
7	110

2) Oui.

3. **a)** -1 **b)** $\frac{12}{25}$ **c)** -2 **d)** 16 **e)** 4

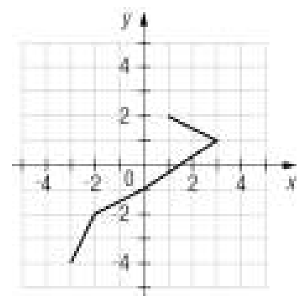
Page 286

4. **a)** 1)



2) Non.

b) 1)



2) Non.

5. **a)** 1) Le nombre d'ouvriers.
2) Le temps nécessaire.

b) 1) La taille.
2) La masse.

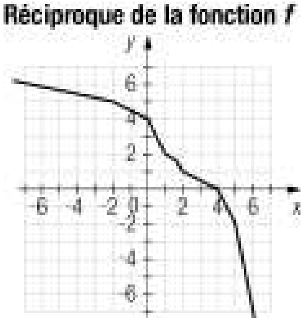
c) 1) La distance.
2) La température.

d) 1) La distance.
2) La quantité d'essence.

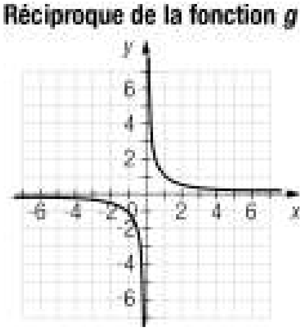
ENRICHISSEMENT 2.1 Les relations, les réciproques et les fonctions

Page 287

1. **a)** **Réciproque de la fonction f**



Réciproque de la fonction g



Dans chaque cas, les représentations graphiques de la fonction et de sa réciproque sont identiques.

b) Pour qu'une fonction soit identique à sa réciproque, sa représentation graphique doit être symétrique par rapport à la bissectrice du 1[er] et du 3[e] quadrant, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

RENFORCEMENT 2.2 Les propriétés des fonctions

Page 289

1. **a)** 1) $]^-30, 70[$ 2) $]^-30, 70[$
3) 40 4) 10
5) Décroissante sur $]^-30, 70[$.
6) Positif sur $]^-30, 10]$; négatif sur $[10, 70[$.

b) 1) $[^-10, ^+\infty[$ 2) $]^-\infty, 8]$
3) 8 4) $^-8$, 2 et 10.
5) Croissante sur $[^-10, 0] \cup [2, 6]$; décroissante sur $[0, 2] \cup [6, ^+\infty[$.
6) Positif sur $[^-8, 10]$; négatif sur $[^-10, ^-8] \cup \{2\} \cup [10, ^+\infty[$.

c) 1) $\mathbb{R}$ 2) $\mathbb{R}$
3) $^-30$ 4) $^-30$, 10 et 50.
5) Croissante sur $[^-13, 33]$; décroissante sur $]^-\infty, ^-13] \cup [33, ^+\infty[$.
6) Positif sur $]^-\infty, ^-30] \cup [10, 50]$; négatif sur $[^-30, 10] \cup [50, ^+\infty[$.

d) 1) $\mathbb{R}$ 2) $]^-\infty, 40]$
3) 0 4) 0 et 40.
5) Croissante sur $]^-\infty, 20]$; décroissante sur $[20, ^+\infty[$.
6) Positif sur $[0, 40]$; négatif sur $]^-\infty, 0] \cup [40, ^+\infty[$.

Page 290

2. **a)** Le domaine est [0, 40] s. Il représente la durée du tour de manège.
b) Le codomaine est [0, 45] m/s. Il représente les vitesses atteintes par le véhicule.
c) La valeur initiale est 0 m/s. Elle représente la vitesse initiale du véhicule.
d) Les zéros sont 0 s et 40 s. Ils représentent les moments où le véhicule est immobilisé.
e) Le véhicule accélère de 0 s à 12 s, ainsi que de 16 s à 18 s, pour une durée totale de 14 s.
f) Elle a tort, car le maximum d'une fonction correspond à la valeur maximale de la variable dépendante. Or, dans ce contexte, la variable dépendante est la vitesse et non la hauteur.
g) Lorsque le véhicule descend, il accélère, tandis que lorsqu'il monte, il ralentit. Ainsi, les périodes durant lesquelles le véhicule descend une côte sont associées à un intervalle de croissance de la fonction, tandis que celles où il monte sont associées à un intervalle de décroissance de la fonction.

ENRICHISSEMENT 2.2 Les propriétés des fonctions

Page 291

1. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

RENFORCEMENT 2.3 Les fonctions polynomiales de degré 0 ou du premier degré

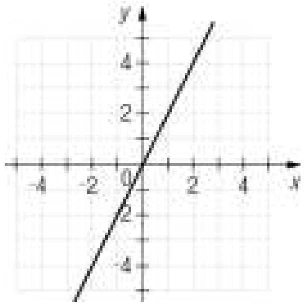
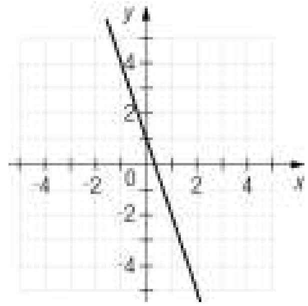
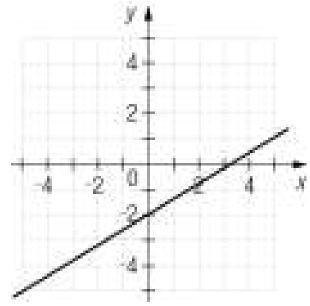
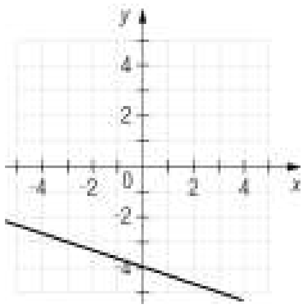
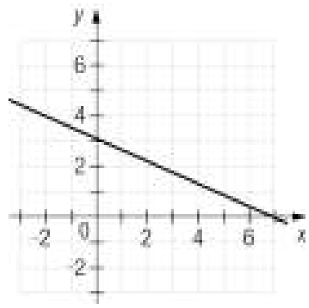
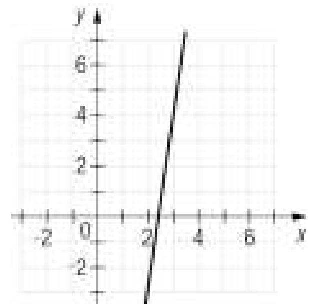
Page 295

1. **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $-\frac{5}{3}$ **c)** $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{13}{11}$ **e)** $-\frac{5}{4}$ **f)** $-\frac{4}{5}$

2. **a)** $^-6$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** 23

3. **a)** $y = 2x + 1$ **b)** $y = ^-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **c)** $y = ^-1$

Page 296

4. **a)**

b)

c)

d)

e)

f)


5. **a)** $y = ^-\frac{4}{57}x + \frac{403}{19}$ **b)** La température est d'environ 19,11 °C.
   c) La température est de 9 °C après 174 min.

ENRICHISSEMENT 2.3 Les fonctions polynomiales de degré 0 ou du premier degré

Page 297

1. L'étape 1 se termine lorsque le réservoir est plein, c'est-à-dire après $\frac{6}{0{,}5} = 12$ min.
   L'étape 2 dure 20 min. On en déduit que l'étape 3 commence à $12 + 20 = 32$ min.
   À 32 min, la quantité est de 6 kl. Il est donc possible de déterminer la règle de la fonction polynomiale du premier degré associée à l'étape 3. Cette règle est de la forme $y = ax + b$, où x représente le temps (en min) et y, la quantité d'eau (en kl).

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4{,}5 - 6}{40 - 32} = ^-\frac{1{,}5}{8} = ^-\frac{3}{16}$$

La règle est donc $y = ^-\frac{3x}{16} + b$.

En substituant les valeurs du couple (40, 4,5) à x et à y, on obtient :

$$4{,}5 = ^-\frac{3}{16} \times 40 + b$$
$$b = 4{,}5 + \frac{120}{16}$$
$$= 12$$

La règle est donc $y = ^-\frac{3x}{16} + 12$.

Si $y = 0$, on a :

$$0 = ^-\frac{3x}{16} + 12$$
$$\frac{3x}{16} = 12$$
$$x = \frac{12}{\frac{3}{16}}$$
$$= 64 \text{ min}$$

Réponse : Le réservoir est vide après 64 min.

RENFORCEMENT 2.4 La fonction rationnelle

Page 300

1. a)

x	*y*
−20	**−3**
12	**5**
15	4
30	2

b)

x	*y*
1	**10**
0,1	100
0,01	1000
0,001	**10 000**

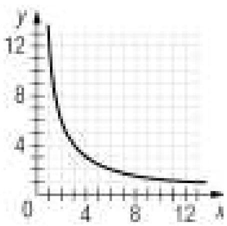
c)

x	*y*
−5	−0,2
−1	**−1**
1	1
4	0,25

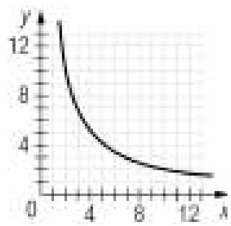
d)

x	*y*
−3	−4
−2	−6
0,5	24
0,25	**48**

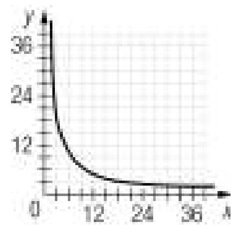
2. a)



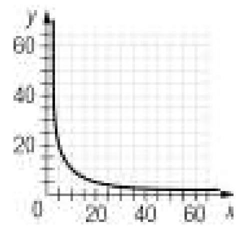
b)



c)



d)



Page 301

3. a) $y = \frac{10}{x}$ **b)** $y = \frac{7}{x}$ **c)** $y = \frac{0,2}{x}$ **d)** $y = \frac{35}{x}$ **e)** $y = \frac{30}{x}$ **f)** $y = \frac{28}{x}$

4. a) $t = \frac{15}{n}$

b) $t = \frac{15}{5}$

$= 3$ s

Réponse : Cet ordinateur prend 3 s pour accomplir la tâche.

c) $0,3 = \frac{15}{n}$

$n = \frac{15}{0,3}$

$= 50$

Réponse : L'ordinateur doit contenir plus de 50 processeurs.

ENRICHISSEMENT 2.4 La fonction rationnelle

Page 302

1. a) En 2009, la pression était de $P_{2009} = \frac{200}{r_{2009}}$.

En 2017, le débit est de $d = 8 \times 8 + 200 = 264$ L/s.

La pression est donc de $P_{2017} = \frac{264}{r_{2017}}$.

Puisqu'on veut que les deux pressions soient égales, on a : $\frac{264}{r_{2017}} = \frac{200}{r_{2009}}$

$r_{2017} = \frac{264}{200} r_{2009}$

$= 1,32r_{2009}$

Réponse : Le rayon de cette conduite doit équivaloir à 1,32 fois le rayon de celle de 2009.

b) Le débit sera de $d = 8 \times 15 + 200 = 320$ L/s.

Le rayon de la conduite sera toujours de $1,32r_{2009}$.

La règle qui permet de déterminer la pression est donc $P_{2024} = \frac{320}{1,32r_{2009}}$.

$P_{2024} \approx \frac{242,42}{r_{2009}}$

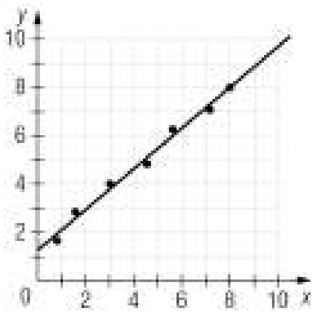
Ainsi :

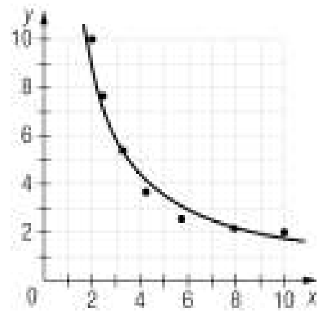
$$\frac{P_{2024}}{P_{2009}} \approx \frac{\frac{242,42}{r_{2009}}}{\frac{200}{r_{2009}}} \approx \frac{242,42}{200} \approx 1,2121 \approx 121,21\ \%$$

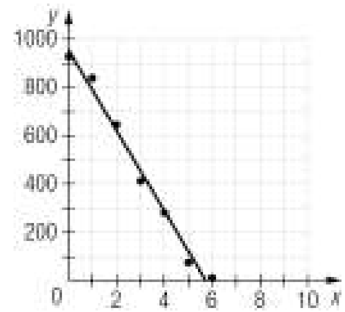
Réponse : En 2024, la pression correspondra à environ 121,21 % de la pression enregistrée en 2009.

RENFORCEMENT 2.5 La modélisation

Page 305

1. a) 1) 

b) 1) 

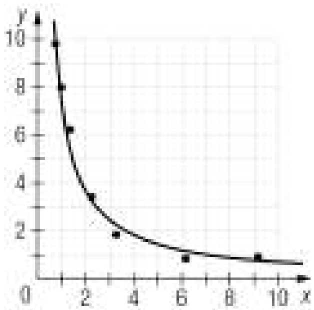
c) 1) 

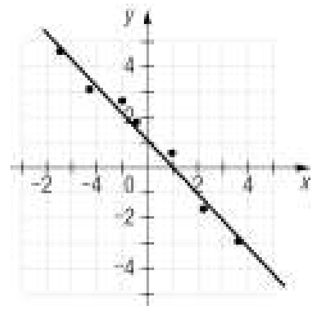
Plusieurs réponses possibles. Exemples :

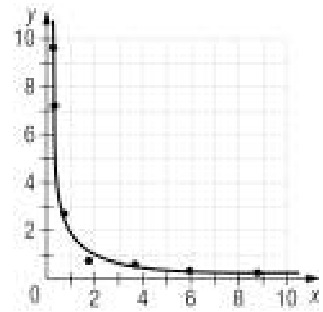
a) 2) $y \approx 0{,}84x + 1{,}29$

b) 2) $y \approx \dfrac{17{,}49}{x}$

c) 2) $y \approx -166{,}3x + 954{,}5$

d) 1) 

e) 1) 

f) 1) 

Plusieurs réponses possibles. Exemples :

d) 2) $y \approx \dfrac{7{,}46}{x}$

e) 2) $y \approx -1{,}08x + 1{,}11$

f) 2) $y \approx \dfrac{2{,}07}{x}$

Page 306

2. a) et **c)**

b) Une fonction rationnelle constituerait un modèle adéquat, car le nuage de points montre une tendance décroissante et les points ne sont pas alignés.

d) La moyenne des produits du diamètre par le temps est d'environ 203,13.

Réponse : La règle est $t \approx \dfrac{203{,}13}{d}$, où t est le temps (en s) et d, le diamètre (en mm) du tuyau.

e) 1)
$$t \approx \frac{203{,}13}{d}$$
$$\approx \frac{203{,}13}{60}$$
$$\approx 3{,}39 \text{ s}$$

Réponse : Le récipient se vide en 3,39 s environ.

2)
$$t \approx \frac{203{,}13}{d}$$
$$2 \approx \frac{203{,}13}{d}$$
$$d \approx \frac{203{,}13}{2}$$
$$\approx 101{,}57 \text{ mm}$$

Réponse : Le diamètre devrait être supérieur à environ 101,56 mm.

ENRICHISSEMENT 2.5 La modélisation

Page 307

1. **a)** 1) Le nuage de points 1. 2) Le nuage de points 2.

   b) Plus les points sont répartis de façon aléatoire dans le plan, moins le modèle est fiable. Plus les points se rapprochent de la droite modèle, plus le modèle est fiable.

   c) *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

   On pourrait encadrer les points par un rectangle. Moins ce rectangle est large, plus le modèle est fiable.

   On pourrait mesurer les distances qui séparent les points de la droite et faire une moyenne. Plus cette moyenne est faible, plus le modèle est fiable.

SP 2 La qualité de l'air

Pages 308-309

Relation entre le nombre d'arbres et l'IQA :

Les points du nuage montrent un certain alignement. On peut donc modéliser ce nuage de points par une fonction polynomiale du premier degré.

Après avoir tracé une droite ajustée à ce nuage, on établit son équation : $i \approx 0{,}01a + 2{,}25$, où a représente le nombre d'arbres par kilomètre carré et i, l'IQA.

Évolution du nombre d'arbres par kilomètre carré :

Le produit du temps par le nombre d'arbres/km^2 montre une certaine constance. On peut donc modéliser cette relation par une fonction rationnelle.

La moyenne des produits est de 1456. La règle de la fonction est donc $a \approx \frac{1456}{t}$, où t représente le temps écoulé depuis 2000 et a, le nombre d'arbres par kilomètre carré.

Prédiction pour 2025 :

$a \approx \frac{1456}{25}$

$\approx 58{,}24$ arbres/km^2

$i \approx 0{,}01 \times 58{,}24 + 2{,}25$

$\approx 2{,}83$

Temps écoulé depuis l'an 2000 (années)	Nombre d'arbres par kilomètre carré	Produit
1	1500	1600
2	800	1650
3	550	1280
4	320	1475
5	295	1500
6	250	1400
7	200	1360
8	170	1395
9	155	1400
10	140	1600

Réponse : En 2025, l'indice de qualité de l'air sera d'environ 2,83.

SR 2 Le champ visuel

Pages 310-311

Relation entre la largeur du champ visuel et la longueur du tuyau

Diamètre de 2 dm

L	l	$L \times l$
2	12	24
3	8	24
4	6	24
6	4	24
8	3	24
Le produit de $L \times l$ du champ visuel est constant et vaut 24, soit 12 fois le diamètre.		

Diamètre de 4 dm

L	l	$L \times l$
2	24	48
3	16	48
4	12	48
6	8	48
8	6	48
Le produit de $L \times l$ du champ visuel est constant et vaut 48, soit 12 fois le diamètre.		

Diamètre de 6 dm

L	l	$L \times l$
2	36	72
3	24	72
4	18	72
6	12	72
8	9	72
Le produit de $L \times l$ du champ visuel est constant et vaut 72, soit 12 fois le diamètre.		

Puisque le produit de $L \times l$ est constant dans tous les cas, ces deux quantités sont reliées par le biais d'une fonction rationnelle de la forme $L = \frac{k}{l}$, où k est une constante.

De plus, le produit de $L \times l$ correspond à 12 fois le diamètre du tuyau. On en déduit que $k = 12d$.

La règle est donc $L = \frac{12d}{l}$.

Pour un tuyau dont le diamètre et la longueur mesurent tous deux 5 dm, la largeur sera de :

$$\begin{aligned} L &= \frac{12d}{l} \\ &= \frac{12 \times 5}{5} \\ &= 12 \text{ dm} \end{aligned}$$

Réponse : Conjecture : La règle est $L = \frac{12d}{l}$ et la largeur du champ visuel, 6 dm.

CARNET 2 Les relations et les fonctions

Page 312

Les relations, les réciproques et les fonctions

- Un lien entre deux variables est appelé **relation**. Généralement, dans une relation entre deux variables :
  - celle dont la variation entraîne la variation de l'autre est appelée *variable* **indépendante** ;
  - celle dont la variation réagit à la variation de l'autre est appelée *variable* **dépendante**.
- Une **réciproque** s'obtient en intervertissant les valeurs de chacun des couples d'une relation entre deux variables.
- Une **fonction** est une relation entre deux variables selon laquelle à chaque valeur de la variable indépendante correspond au plus une et une seule valeur de la variable dépendante.

Le taux de variation

Le taux de variation entre les **couples** (x_1, y_1) et (x_2, y_2) se calcule de la façon suivante.

$$\text{Taux de variation} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La fonction polynomiale de degré 0

- Des variations de la variable indépendante entraînent des **variations nulles** de la variable dépendante.
- La règle est de la forme :

  $f(x) = a$, où a est une **constante**.
- Sa représentation graphique est une **droite parallèle** à l'axe des abscisses qui croise l'axe des ordonnées en (0, a).

La fonction polynomiale du premier degré

- Des variations constantes de la variable **indépendante** entraînent des variations constantes et non nulles de la variable **dépendante**.
- La règle est de la forme :

  $f(x) = ax + b$, où $a \neq 0$.

  Dans cette règle, a est le **taux de variation** et b, la **valeur initiale**.

La fonction de variation directe

La règle s'écrit $\boldsymbol{f(x) = ax}$, où $a \neq 0$.

La fonction de variation partielle

La règle s'écrit $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Page 313

La fonction rationnelle

- Une relation entre deux variables dont le produit des valeurs de chacun des couples est **constant** et non nul est une **fonction rationnelle**.
- La règle d'une fonction rationnelle s'écrit :

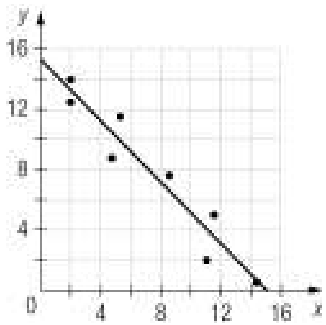
  $f(x) = \frac{k}{x}$ où $x \neq 0$ et $k > 0$.

  Dans cette règle, k correspond au **produit** des valeurs de chacun des couples (x, y) de la fonction.
- La représentation graphique d'une fonction rationnelle montre une courbe ou des points d'une courbe dont les extrémités se rapprochent de plus en plus lentement des **axes** sans y toucher.
- La **réciproque** d'une fonction rationnelle est aussi une fonction rationnelle et possède la même règle lorsqu'elle est de la forme $f(x) = \frac{k}{x}$.

La modélisation

- Un modèle mathématique adéquat permet d'obtenir une courbe bien ajustée, c'est-à-dire une courbe qui est **représentative** de la majorité des points du nuage.
- Si les points du nuage associé à une situation montrent un certain alignement, il est pertinent de modéliser la situation à l'aide d'une fonction **polynomiale du premier degré**.

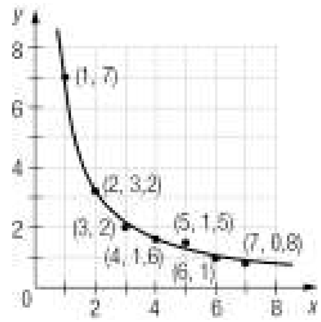
Exemple :



- L'**inclinaison** de la droite est celle suggérée par le nuage de points.
- Si possible, **autant** de points sont situés de part et d'autre de la droite.

- Si les produits des valeurs des couples associés à une situation montrent une certaine constance, il est pertinent de modéliser la situation à l'aide d'une fonction **rationnelle**.

Exemple :



- Le produit des valeurs de chacun des couples est sensiblement le même.
- La moyenne de ces produits est d'environ 6,41.
- La règle du modèle mathématique est donc $y \approx \frac{6{,}41}{x}$.

TEST 2 Les relations et les fonctions

Page 314

1. **a)** 2) **b)** 1) **c)** 4) **2.** **d)** **3.** **a)**

Page 315

4. **a)** Taux de variation : $a = \frac{4-0}{0-{}^{-}3}$

$= \frac{4}{3}$

Valeur initiale : b = 4

$y = \frac{4x}{3} + 4$

b) Il s'agit d'une fonction rationnelle qui passe par le point de coordonnées (3, 2).

Le produit des valeurs des couples est donc 6.

$y = \frac{6}{x}$

c) Taux de variation : $a = \frac{4-{}^{-}2}{{}^{-}3-5}$

$= {}^{-}\frac{6}{8}$

$= {}^{-}\frac{3}{4}$

Valeur initiale :

Soit le couple (5, ⁻2).

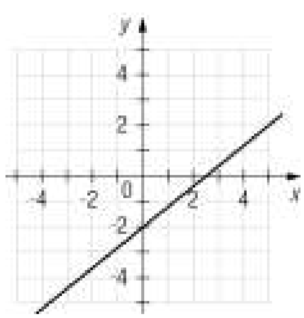
${}^{-}2 = {}^{-}\frac{3}{4} \times 5 + b$

$b = {}^{-}2 + \frac{15}{4}$

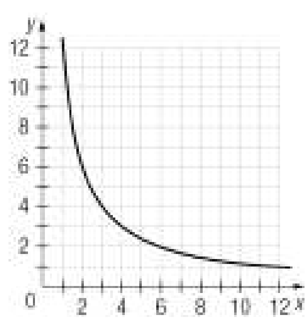
$= \frac{7}{4}$

$y = {}^{-}\frac{3x}{4} + \frac{7}{4}$

5. **a)**



b)



6. $h = \frac{100}{b}$

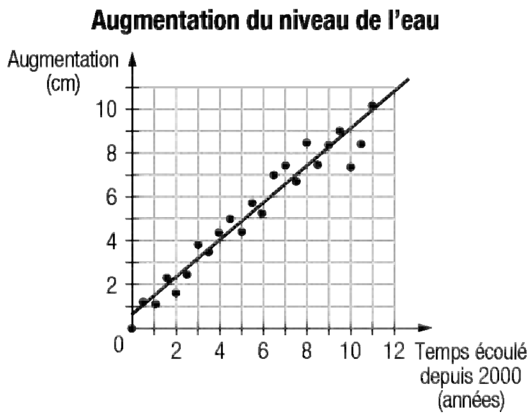
$0{,}2 = \frac{100}{b}$

$b = \frac{100}{0{,}2}$

$= 500$ cm

Réponse : La base mesure 500 cm.

7.



Les points du nuage montrent un alignement caractéristique d'une fonction polynomiale du premier degré. La droite la mieux ajustée passe par les points (7, 6,5) et (1, 1,5).

Taux de variation a : $= \frac{6{,}5 - 1{,}5}{7 - 1}$

$= \frac{5}{6}$

Valeur initiale :

Soit le couple (1, 1,5).

$1{,}5 = \frac{5}{6} \times 1 + b$

$b = 1{,}5 - \frac{5}{6}$

$= \frac{4}{6}$

$= \frac{2}{3}$

La règle de la droite qui sert de modèle est $y \approx \frac{5x}{6} + \frac{2}{3}$, où x représente le temps (en années) écoulé depuis l'an 2000 et y, l'augmentation (en cm) du niveau de l'eau.

Si $x = 50$, on a :

$y \approx \frac{5}{6} \times 50 + \frac{2}{3}$

$\approx 42{,}33$ cm

$42{,}33 \text{ cm} > 40 \text{ cm}$

Réponse : En effet, si la tendance se maintient, le niveau de l'eau aura augmenté d'au moins 40 cm en 2050 par rapport à l'an 2000.